# 13　ジョルダン・ブラウワーの定理

補題 **13.1 (ウリゾーン・ティーツェの補題).** 閉集合 $A \subset \mathbb{R}^m$ と連続写像 $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ について、任意の $x \in A$ に対して $F(x) = f(x)$ を満たす連続写像 $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が存在する。

証明. 二点 $x, y \in \mathbb{R}^m$ の距離を $d(x, y) = \|x - y\|$ と表しておき、点 $x \in \mathbb{R}^m$ から集合 $A$ への距離を次のように定義する。

$$d(x, A) = \inf\{y \in A \mid d(x, y)\}$$

任意の $p \in \mathbb{R}^m \setminus A$ に対して、次のように定義された開集合 $U_p \subset \mathbb{R}^m \setminus A$ を考えてみる。

$$U_p = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(p, x) < \tfrac{1}{2} d(p, A)\}$$

開集合 $\mathbb{R}^m \setminus A$ の開被覆となるので、1 の分解より、定理 8.1 の性質 (i)–(iii) を満たす滑らかな写像 $\phi_p\colon \mathbb{R}^m \setminus A \to \mathbb{R}$ が存在する。今、任意の $p \in \mathbb{R}^m \setminus A$ について、$d(p, a(p)) < 2d(p, A)$ を満たす点 $a(p) \in A$ を選び、次のように定義された写像 $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を考えてみる。

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in A) \\ \sum_{p \in \mathbb{R}^m \setminus A} \phi_p(x) f(a(p)) & (x \in \mathbb{R}^m \setminus A) \end{cases}$$

この写像は、写像 $f$ を拡張するうまく定義された写像であり、$\mathbb{R}^m \setminus A$ と $A$ の内部上連続写像であることが分かる。よって、$F$ も $A$ の境界上連続であることを示せばよい... □

補題 **13.2.** 閉集合 $A \subset \mathbb{R}^m$ と $B \subset \mathbb{R}^n$、同相 $f\colon A \to B$ に対して、次の性質を満たす同相

$$F\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

が存在する。「任意の $x \in A$ に対して、$F(x, 0) = (0, f(x))$」

証明. 補題 13.1 より、連続写像 $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ を拡張する連続写像 $g_1\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が存在する。このとき、$F_1(x, y) = (x, y + g_1(x))$ で定義された写像 $F_1\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ は、同相であり、逆写像は、$F_1^{-1}(x, y) = (x, y - g_1(x))$ で与えられた写像であることが分かる。同様に、連続写像 $f^{-1}\colon B \to \mathbb{R}^m$ を拡張する連続写像 $g_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が与えられたとき、$F_2(x, y) = (x + g_2(y), y)$ で定義された写像 $F_2\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ は、同相であることが分かる。よって、合成写像

$$F = F_2^{-1} \circ F_1\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

も同相であることが分かる。今、任意の $x \in A$ に対して、

$$\begin{aligned} F(x,0) &= F_2^{-1}(F_1(x,0)) = F_2^{-1}(x, 0+g_1(x)) = F_2^{-1}(x, f(x)) \\ &= (x - g_2(f(x)), f(x)) = (x - f^{-1}(f(x)), f(x)) = (0, f(x)) \end{aligned}$$

であることが得る。 □

系 **13.3.** 閉集合 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ と同相 $f\colon A \to B$ に対して、次の性質を満たす同相

$$F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

が存在する。「任意の $x \in A$ に対して、$F(x,0) = (f(x), 0))$」

証明. 補題 13.2 より、任意の $x \in A$ に対して、$G(x,0) = (0, f(x))$ を満たす同相

$$G\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

が存在する。これに、$T\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ を $T(x,y) = (y,x)$ と定めると、合成写像

$$F = T \circ G\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

は、任意の $x \in A$ に対して、$F(x,0) = (f(x), 0)$ を満たす同相であることが分かる。 □

注 13.4. 閉集合 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ は同相であるとき、系 13.3 より、開集合 $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus (A \times \{0\})$ と $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus (B \times \{0\})$ も同相である。しかし、必ずしも開集合 $\mathbb{R}^n \setminus A$ と $\mathbb{R}^n \setminus B$ は同相ではない。例として、アレキサンダーの角 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ と球面 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ は同相なのに、$\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ と $\mathbb{R}^3 \setminus S^2$ は同相ではない。

定理 **13.5.** 同相の閉集合 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ につして、任意の $p \geqslant 0$ に対して、

$$\dim_{\mathbb{R}} H^p(\mathbb{R}^n \setminus A) = \dim_{\mathbb{R}} H^p(\mathbb{R}^n \setminus B)$$

である。

証明. まず、$A, B \subset \mathbb{R}^n$ は真部分集合であることを仮定する。同相 $f\colon A \to B$ が与えられたとき、系 13.3 より、その同相を拡張する同相

$$F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

が選ぶことができる。この同相について、制限された写像

$$F|_{(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)\smallsetminus(A\times\{0\})}\colon (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)\smallsetminus(A\times\{0\})\to(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)\smallsetminus(B\times\{0\})$$

も同相であることが分かる。今、$p>0$ のとき、次の図式を考えてみる。

$$\begin{tikzcd} H^p(\mathbb{R}^n\smallsetminus A) \arrow[r, "(\sigma^*)^n"] & H^{p+n}((\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)\smallsetminus(A\times\{0\})) \\ H^p(\mathbb{R}^n\smallsetminus B) \arrow[r, "(\sigma^*)^n"] & H^{p+n}((\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)\smallsetminus(B\times\{0\})) \arrow[u, "(F|_{(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)\smallsetminus(A\times\{0\})})^*"'] \end{tikzcd}$$

ここで、反復サスペンション準同型 $(\sigma^*)^n$ は、命題 11.8 より、同型であり、系 11.6 より、垂直の写像も同型であることが分かる。よって、$H^p(\mathbb{R}^n\smallsetminus A)$ と $H^p(\mathbb{R}^n\smallsetminus B)$ が同型であることが得る。

同様に、$p=0$ のとき、次の図式を考えてみる。

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{R}\cdot 1_{\mathbb{R}^n\smallsetminus A} \arrow[r] & H^0(\mathbb{R}^n\smallsetminus A) \arrow[r, "(\sigma^*)^n"] & H^n((\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)\smallsetminus(A\times\{0\})) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{R}\cdot 1_{\mathbb{R}^n\smallsetminus B} \arrow[r] & H^0(\mathbb{R}^n\smallsetminus B) \arrow[r, "(\sigma^*)^n"] & H^n((\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)\smallsetminus(B\times\{0\})) \arrow[r] \arrow[u, "(F|_{(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)\smallsetminus(A\times\{0\})})^*"'] & 0 \end{tikzcd}$$

ここで、命題 11.8 より、列が短完全系列であり、系 11.6 より、乗直の写像は、同型であることが分かる。よって、$H^0(\mathbb{R}^n\smallsetminus A)$ と $H^0(\mathbb{R}^n\smallsetminus B)$ は同型であることが分かる。

最後に、$A=\mathbb{R}^n$ と $B=\mathbb{R}^n$ は同値であることを示せばよい。命題 11.8 と系 11.6 より、次の図式では、すべての写像は同型であることが分かる。

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{R}\cdot 1 \arrow[r] & H^0((\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\smallsetminus(A\times\{0\})) \arrow[r, "(\sigma^*)^{n-1}"] & H^{n-1}((\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)\smallsetminus(A\times\{0\})) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{R}\cdot 1 \arrow[r] & H^0((\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\smallsetminus(B\times\{0\})) \arrow[r, "(\sigma^*)^{n-1}"] & H^{n-1}((\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)\smallsetminus(B\times\{0\})) \arrow[r] \arrow[u, "(F|_{(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)\smallsetminus(A\times\{0\})})^*"'] & 0 \end{tikzcd}$$

よって、$(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\smallsetminus(A\times\{0\})$ が連結であることと $(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\smallsetminus(B\times\{0\})$ が連結であることは、同値である。さらに、$(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\smallsetminus(A\times\{0\})$ と $(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\smallsetminus(B\times\{0\})$ が連結であることとそれぞれ $A$ と $B$ が真部分集合であることは、同値である。よって、$A=\mathbb{R}^n$ と $B=\mathbb{R}^n$ は同値であることが分かる。これで、定理が得る。 □

一般的に、開集合 $U\subset\mathbb{R}^n$ に対して、$\dim_{\mathbb{R}} H^0(U)$ と $U$ の連結成分の数は等しいである。よって、次の系が成り立つ。

系 **13.6.** 閉集合 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ に対して、開集合 $\mathbb{R}^n \setminus A$ と $\mathbb{R}^n \setminus B$ の連結成分の数は等しいである。

定理 **13.7** (ジョルダン・ブラウワーの定理)**.** 球面 $S^{n-1}$ と同相である部分集合 $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ に対して、次の性質が成り立つ。

(i) 開集合 $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ は二つの互いに素な連結成分 $U_1$ と $U_2$ からなり、二つの連結成分の一方 $U_1$ は有界で、他方 $U_2$ は非有界である。

(ii) $\Sigma$ は両成分 $U_1$ と $U_2$ の共通の境界である。

連結成分 $U_1$ と $U_2$ は、それぞれ $\Sigma$ の内部と外部と呼ばれた。

証明. まず、$\Sigma = S^{n-1}$ のとき、開集合 $\mathbb{R}^n \setminus S^{n-1}$ は次の二つの互いに素な連結成分からなる。

$$\mathring{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$
$$W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > 1\}$$

よって、系 13.6 より、一般的に、開集合 $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ も二つの互いに素な連結成分 $U_1$ と $U_2$ からなることが分かる。ここで、$\Sigma$ はコンパクトなので、ハウスドルフ空間 $\mathbb{R}^n$ の閉集合であることが分かる。今、$r = \max\{\|x\| \mid x \in \Sigma\}$ をおいておく。部分集合 $rW \subset \mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ は連結なので、一つの連結成分の部分集合となることが分かる。よって、$rW$ を含む連結成分 $U_2$ は非有界であることが分かる。それに、$rW$ を含まない連結成分 $U_1$ は、開球体 $r\mathring{D}^n$ の部分集合なので、有界であることが分かる。これで、性質 (i) が成り立つ。

次に、部分集合 $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ は開集合なので、それらの境界は必ず $\mathbb{R}^n \setminus (U_1 \cup U_2) = \Sigma$ の部分集合であることが分かる。よって、性質 (ii) を示すために、任意の点 $p \in \Sigma$ に対して、$p$ は両成分 $U_1$ と $U_2$ の境界点であることを示せばよい。すなわち、点 $p \in \Sigma$ が与えられたとき、任意の開近傍 $p \in V \subset \mathbb{R}^n$ に対して、$V \cap U_1 \neq \varnothing$ と $V \cap U_2 \neq \varnothing$ であることを示せばよい。定理の仮定より、$\Sigma$ と $S^{n-1}$ は同相であるので、閉集合 $A = \Sigma \setminus (\Sigma \cap V) \subset \Sigma$ も球面 $S^{n-1}$ の閉集合 $B \subset S^{n-1}$ と同相であることが分かる。明らかに、$\mathbb{R}^n \setminus B$ は連結なので、系 13.6 より、$\mathbb{R}^n \setminus A$ も連結であることが分かる。ユークリッド空間の開集合なので、$\mathbb{R}^n \setminus A$ は道連結であることが分かる。よって、二つの点 $p_1 \in U_1$ と $p_2 \in U_2$ が選ばれたとき、$\gamma(0) = p_1$ と $\gamma(1) = p_2$ を満たす連続曲線 $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus A$ が存在することが分かる。性質 (i) より、逆像

$$\gamma^{-1}(\Sigma) \subset [0,1]$$

は、空集合でない閉集合なので、最小値と最大値が存在し、次の不等式を満たす。

$$0 < a = \min \gamma^{-1}(\Sigma) < b = \max \gamma^{-1}(\Sigma) < 1$$

よって、$\gamma(a), \gamma(b) \in \Sigma \cap V$ は、それぞれ $\gamma([0,a))$ と $\gamma((b,1])$ の境界点なので、次の性質を満たす $t_1 \in [0,a)$ と $t_2 \in (b,1]$ が存在することが分かる。「$\gamma(t_1) \in U_1 \cap V$ かつ $\gamma(t_2) \in U_2 \cap V$」これで、$p$ は両成分 $U_1$ と $U_2$ の境界点であることが得る。 □