12　ブラウワーの定理

まず、サスペンション準同型を用い、例 9.5 の一般化を示す。

定理 **12.1.** 任意の $n \geqslant 2$ に対して、

$$\dim_{\mathbb{R}} H^p(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}) = \begin{cases} 1 & (p = 0 \text{ 及び } p = n-1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

である。

証明. 帰納法を使う。先ず、$n = 2$ のとき、例 9.5 より、定理が成り立つので、$n-1$ のときを正しいと仮定し、n のときを示せばよい。それに、命題 11.8 より、任意の $p \geqslant 2$ に対して、

$$\dim_{\mathbb{R}} H^p(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}) = \dim_{\mathbb{R}} H^p((\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}) \smallsetminus (\{0\} \times \{0\})) = \dim_{\mathbb{R}} H^{p-1}(\mathbb{R}^{n-1} \smallsetminus \{0\})$$

であることが分かる。さらに、命題 11.8 の (i) と (ii) より、

$$\dim_{\mathbb{R}} H^0(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}) = 1$$
$$\dim_{\mathbb{R}} H^1(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}) = 0$$

であることも成り立つ。これで、定理が得る。 □

注 12.2. 開集合 $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \subset \mathbb{R}$ に対して、系 9.4 とポアンカレの補体（定理 6.4）より、

$$H^p(\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R} \cdot 1_{(-\infty,0)} \oplus \mathbb{R} \cdot 1_{(0,\infty)} & (p = 0) \\ 0 & (p \neq 0) \end{cases}$$

であることが分かる。

微分同相 $f \colon R^m \to \mathbb{R}^n$ が存在するとき、連鎖律の公式より、任意の $x \in \mathbb{R}^m$ に対して、ヤコビ行列 $D_x f$ は可逆行列なので、すぐ $m = n$ であることが分かる。一方、次の結果を証明するために、ここまで紹介された理論の全体を必要とする。

定理 **12.3 (ブラウワー).** 同相 $f \colon R^m \to \mathbb{R}^n$ が存在するとき、必ず $m = n$ である。

証明. 同相 $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が与えられたとき、次のように定義された写像も同相となる。

$$g\colon \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \qquad g(x) = f(x) - f(0)$$

よって、命題 11.6 より、任意の $p \geqslant 0$ に対して、誘導された写像

$$g^*\colon H^p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H^p(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$$

は同型となることが分かる。このとき、定理 12.1 と注 12.2 より、$m = n$ であることが分かる。 □

次に、n 次元の閉球体 D^n とその境界 S^{n-1} を復習する。

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$$
$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

補題 **12.4.** 次の性質を満たす連続写像 $g\colon D^n \to S^{n-1}$ が存在しない。「任意の $x \in S^{n-1}$ に対して、$g(x) = x$」

証明. 次のように定義された写像を考えてみる。

$$r\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \qquad r(x) = x/\|x\|$$

例 10.6 より、この写像は恒道写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ とホモトピックであることが分かる。今、任意の $x \in S^{n-1}$ に対して、$g(x) = x$ を満たす連続写像 $g\colon D^n \to S^{n-1}$ が存在することを仮定し、次のように定義された連続写像を考えてみる。

$$F\colon (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \qquad F(x,t) = g(tr(x))$$

この写像は、値 $g(0)$ 定置写像から写像 r へのホモトピーとなるので、値 $g(0)$ 定置写像と恒道写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ がホモトピックであることが分かる。よって、開集合 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は可縮の集合であることが分かる。このとき、系 11.7 より、

$$\dim_{\mathbb{R}} H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ 0 & (n > 1) \end{cases}$$

であることが分かる。しかし、定理 12.1 と注 12.2 より、

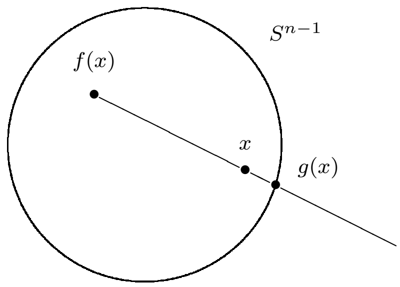
$$\dim_{\mathbb{R}} H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \begin{cases} 2 & (n = 1) \\ 1 & (n > 1) \end{cases}$$

なので、当連続写像 $g\colon D^n \to S^{n-1}$ は存在することができない。 □

次の定理は、1912 にブラウワーによって証明された。代数トポロジーのうち、もっとも応用されているものである。

<u>定理</u> **12.5 (ブラウワーの不動点定理).** 任意の連続写像 $f\colon D^n \to D^n$ について、必ず $f(x) = x$ を満たす点 $x \in D^n$ が存在する。

<u>証明</u>. 逆に、任意の $x \in D^n$ に対して、$f(x) \neq x$ を満たす連続写像 $f\colon D^n \to D^n$ が存在することを仮定する。そのとき、$f(x)$ が始点で x を通る半直線と、球面 S^{n-1} は、一点 $g(x)$ で交わる。このように、写像 $g\colon D^n \to S^{n-1}$ が定義される。



正確に、点 $g(x)$ は次のように与えられている。

$$g(x) = tx + (1-t)f(x)$$

ただし t は、次の 2 次方程式の一意の正の次数解である。

$$\langle tx + (1-t)f(x), tx + (1-t)f(x)\rangle = 1$$

よって、写像 $g\colon D^n \to S^{n-1}$ は連続で、任意の $x \in S^{n-1}$ に対して、$g(x) = x$ を満たすことが分かる。しかし、補題 12.4 より、このような写像 g は、存在することができないので、仮定のような写像 f も存在することができない。これで、定理が得る。 $\square$

<u>補題</u> **12.6.** 真閉集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ について、任意の $p \geqslant 1$ に対して、

$$R^* = -\mathrm{id}\colon H^p((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \smallsetminus (A \times \{0\})) \to H^p((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \smallsetminus (A \times \{0\}))$$

である。ここで、$R\colon (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \smallsetminus (A \times \{0\}) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \smallsetminus (A \times \{0\})$ は、次のように定義された反射という微分同相である。

$$R(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, -x_{n+1})$$

<u>証明</u>. 命題 11.8 の証明で定義された開集合 $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ を思い出そう。反射 R は、微分同相 $R_1 \colon U_1 \to U_2$ と $R_2 = R_1^{-1} \colon U_2 \to U_1$、$R_0 \colon U_1 \cap U_2 \to U_1 \cap U_2$ を誘導し、次の図式は可換になることが分かる。

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "R"] & U \\
U_1 \arrow[u, "i_1"] \arrow[r, "R_1"] & U_2 \arrow[u, "i_2"] \\
U_1 \cap U_2 \arrow[u, "j_1"] \arrow[r, "R_0"] & U_1 \cap U_2 \arrow[u, "j_2"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "R"] & U \\
U_2 \arrow[u, "i_2"] \arrow[r, "R_2"] & U_1 \arrow[u, "i_1"] \\
U_1 \cap U_2 \arrow[u, "j_2"] \arrow[r, "R_0"] & U_1 \cap U_2 \arrow[u, "j_1"]
\end{tikzcd}
$$

ここで、$U = U_1 \cup U_2 = (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \smallsetminus (A \times \{0\})$ である。よって、次のチェイン複体とチェイン写像を合わせた図式も可換になることが分かる。

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^*(U) \arrow[r, "(i_1^*, i_2^*)"] \arrow[d, "R^*"] & \Omega^*(U_1) \oplus \Omega^*(U_2) \arrow[r, "j_1^* - j_2^*"] \arrow[d, "T"] & \Omega^*(U_1 \cap U_2) \arrow[r] \arrow[d, "-R_0^*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^*(U) \arrow[r, "(i_1^*, i_2^*)"] & \Omega^*(U_1) \oplus \Omega^*(U_2) \arrow[r, "j_1^* - j_2^*"] & \Omega^*(U_1 \cap U_2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

ここで、$T(\omega_1, \omega_2) = (R_1^*(\omega_2), R_2^*(\omega_1))$ である。よって、境界準同型の定義（定義 7.9）より、次の図式で、右辺の正方形は可換になることが分かる。さらに、$\mathrm{pr}_1 \circ R_0 = R_0 \colon U_1 \cap U_2 \to \mathbb{R}^n \smallsetminus A$ なので、左辺の正方形も可換になることが分かる。

$$
\begin{tikzcd}
H^{p-1}(\mathbb{R}^n \smallsetminus A) \arrow[r, "\mathrm{pr}_1^*"] \arrow[d, "-\mathrm{id}"] & H^{p-1}(U_1 \cap U_2) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "-R_0^*"] & H^p(U) \arrow[d, "R^*"] \\
H^{p-1}(\mathbb{R}^n \smallsetminus A) \arrow[r, "\mathrm{pr}_1^*"] & H^{p-1}(U_1 \cap U_2) \arrow[r, "\delta^*"] & H^p(U)
\end{tikzcd}
$$

今、命題 11.8 より、任意の $p \geqslant 1$ に対して、合成写像 $\sigma^* = \delta^* \circ \mathrm{pr}_1^*$ は全射であることが分かる。よって、任意の $a = \sigma^*(b) \in H^p(U)$ に対して、

$$R^*(a) = R^*(\sigma^*(b)) = \sigma^*(-b) = -\sigma^*(b) = -a$$

であることが分かる。すなわち、$R^* = -\mathrm{id}$ であることが得る。 □

次のように定義された写像は、対心写像と呼ばれる。

$$A \colon \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}, \qquad A(x) = -x$$

<u>系</u> **12.7.** 任意の $n \geqslant 2$ について、対心写像で誘導された写像に対して、

$$A^* = (-1)^n \,\mathrm{id}\colon H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

である。

<u>証明</u>. 対心写像を次のように表す。

$$A = R_n \circ \cdots \circ R_2 \circ R_1 \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

ここで、$R_i \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は、次のように定義された反射である。

$$R_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

よって、この反射で誘導された写像に対して、

$$R_i^* = -\,\mathrm{id}\colon H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

であることを示せばよい。補題 12.6 より、$i = n$ のときは正しいであることが分かる。一般的に、次のように定義された微分同相 $\sigma_{i,n} \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ を考えてみる。

$$\sigma_{i,n}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, x_i)$$

これに、次の図式が可換になることが分かる。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \arrow[r, "\sigma_{i,n}"] \arrow[d, "R_i"] & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \arrow[d, "R_n"] \\
\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \arrow[r, "\sigma_{i,n}"] & \mathbb{R}^n \setminus \{0\}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \arrow[l, "\sigma_{i,n}^*"'] \\
H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \arrow[u, "R_i^*"] & H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \arrow[l, "\sigma_{i,n}^*"'] \arrow[u, "R_n^*"]
\end{tikzcd}$$

よって、任意の $a = \sigma_{i,n}^*(b) \in H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ に対して、

$$R_i^*(a) = R_i^*(\sigma_{i,n}^*(b)) = \sigma_{i,n}^*(R_n^*(b)) = \sigma_{i,n}^*(-b) = -\sigma_{i,n}^*(b) = -a$$

であることが分かる。これで、系が得る。 □

球面 S^{n-1} 上連続の接ベクトル場とは、次の性質を満たす写像

$$\mathfrak{X} \colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$$

と定義される。「任意の $x \in S^{n-1}$ に対して、$\langle x, \mathfrak{X}(x) \rangle = 0$」

例 12.8. $n=2m$ は偶数のとき、次のように定義された写像は、球面 S^{n-1} 上連続の単位接ベクトル場である。

$$\mathfrak{X}(x_1, x_2, \ldots, x_{2m-1}, x_{2m}) = (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2m}, x_{2m-1})$$

このベクトル場について、任意の $x \in S^{n-1}$ に対して、$\|\mathfrak{X}(x)\| = 1$ である。特に、ベクトル場 $\mathfrak{X}$ は、球面 S^{n-1} 上にどこでもゼロでないベクトル場である。

次の定理について、$n=3$ のとき、ポアンカレによって証明され、$n \geqslant 3$ のとき、ブラウワーによって証明された。

定理 **12.9 (ポアンカレ・ブラウワー).** もし n が奇数なら、どんな球面 S^{n-1} 上の連続接ベクトル場 $\mathfrak{X}$ に対しても、必ず $\mathfrak{X}(x) = 0$ となら点 x が存在する。

証明. 逆に、もしどこでもゼロでない連続接ベクトル空場 $\mathfrak{X}\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ が与えられた、次のように定義された連続写像 $F\colon (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ を考えてみる。

$$F(x,t) = (\cos \pi t)x + (\sin \pi t)\mathfrak{X}(x/\|x\|)$$

この写像 F は、$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ から対心写像 A へのホモトピーであるので、定理 11.4 より、

$$A^* = (\mathrm{id})^* = \mathrm{id}\colon H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

であることが分かる。しかし、系 12.7 より、

$$A^* = (-1)^n \,\mathrm{id}\colon H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

なので、n が偶数であることが分かる。これで、定理が得る。 □