10　ホモトピー不変性

つづいて、ド・ラームコホモロジーは、ユークリッド空間の開集合とその連続写像のホモトピー類なす圏から実ベクトル空間とその線形写像のなす圏への反変関手となることを示す。その性質を使い、開集合 $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ のコホモロジーベクトル空間を計算する。

<u>定義</u> **10.1.** 位相空間 X と Y において、連続写像 $f\colon X \to Y$ から連続写像 $g\colon X \to Y$ へのホモトピーとは、次の性質を満たす連続写像 $F\colon X \times [0,1] \to Y$ のことである。「任意の $x \in X$ に対して、$F(x,0) = f(x)$ かつ $F(x,1) = g(x)$」

連続写像 $f\colon X \to Y$ から連続写像 $g\colon X \to Y$ へのホモトピーが存在するとき、f と g がホモトピックと呼ばれ、$f \simeq g$ と書かれる。

<u>補題</u> **10.2.** 連続写像 $f, g, h\colon X \to Y$ について、次の性質が成り立つ。

(i) $f \simeq f$

(ii) $f \simeq g$ ならば $g \simeq f$

(iii) $f \simeq g$ かつ $g \simeq h$ ならば $f \simeq h$

すなわち、ホモトピーは同値関係である。

<u>証明</u>. (i) 次のように定義された写像 $F\colon X \times [0,1] \to Y$ は、f から自分自身へのホモトピーとなる。「$F(x,t) = f(x)$」

(ii) 写像 f から写像 g へのホモトピー $F\colon X \times [0,1] \to Y$ において、次のように定義された写像 $\bar{F}\colon X \times [0,1] \to Y$ は g から f へのホモトピーとなる。「$\bar{F}(x,t) = F(x,1-t)$」

(iii) 写像 f から写像 g へのホモトピー $F\colon X \times [0,1] \to Y$ と写像 g から写像 h へのホモトピー $G\colon X \times [0,1] \to Y$ が与えられたとき、次のように定義された写像 $H\colon X \times [0,1] \to Y$ は、写像 f から写像 h へのホモトピーとなる。

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & (0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}) \\ G(x,2t-1) & (\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1) \end{cases}$$

これで、補題が成り立つ。 □

補題 **10.3.** 連続写像 $f_v\colon X \to Y$ と $g_v\colon Y \to Z$（$v = 0,1$）において、$f_0 \simeq f_1$ と $g_0 \simeq g_1$ ならば $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$ となる。

証明. 写像 f_0 から f_1 へのホモトピー $F\colon X \times [0,1] \to Y$ と写像 g_0 から g_1 へのホモトピー $G\colon Y \times [0,1] \to Z$ が与えられたとき、合成写像 $g_0 \circ f_0$ から合成写像 $g_1 \circ f_1$ へのホモトピー $H\colon X \times [0,1] \to Y$ は、次のように定義される。「$H(x,t) = G(F(x,t),t)$」 □

定義 **10.4.** 連続写像 $f\colon X \to Y$ はホモトピー同値であることは、次の性質を満たす連続写像 $g\colon Y \to X$ が存在することである。「$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ と $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$」このとき、$g$ は f のホモトピー逆写像と呼ばれる。

ホモトピー同値 $f\colon X \to Y$ が存在するとき、位相空間 X と Y がホモトピー同値であるという。特に、空間 1 点とホモトピー同値位相空間は、可縮であるという。

注 10.5. 補題 10.2 より、位相空間 X から位相空間 Y への連続写像のホモトピー類のなす集合は、うまく定義された集合であることが分かる。この集合は $[X,Y]$ と書かれ、連続写像 f を含むホモトピー類は $[f]$ と書かれる。それに、補題 10.3 より、三つの位相空間 X と Y、Z について、次のように定義された写像は、うまく定義された写像であることが分かる。

$$[Y,Z] \times [X,Y] \xrightarrow{\circ} [X,Z] \qquad ([g],[f]) \longmapsto [g \circ f]$$

このように、位相空間と連続写像のホモトピー類を合わせたホモトピー圏が成り立つ。これに、連続写像 $f\colon X \to Y$ について、f がホモトピー同値であることと $[f]$ が同型であることは同値である。同様に、g が f のホモトピー逆写像であることと $[g]$ が $[f]$ の逆射であることは同値である。

例 10.6. ユークリッド空間の部分空間 $Y \subset \mathbb{R}^n$ とある位相空間 X からの連続写像 $f, g\colon X \to Y$ をおいておく。任意の $x \in X$ に対して、部分空間 Y は点 $f(x) \in \mathbb{R}^n$ から点 $g(x) \in \mathbb{R}^n$ への線分を含むとき、次のように f から g へのホモトピー $F\colon X \times [0,1] \to Y$ が定義された。

$$F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

例として、点 $\bar{y} \in Y$ によって星形集合 $Y \subset \mathbb{R}^n$ と単射 $f\colon \{\bar{y}\} \to Y$、定置写像 $g\colon Y \to \{\bar{y}\}$ を考えてみる。このとき、以上のように、$f \circ g$ から恒道写像 id_Y へのホモトピーが成り立つ。さらに、$g \circ f = \mathrm{id}_{\{\bar{y}\}}$ なので、f はホモトピー同値であり、位相空間 Y は可縮であることが分かる。

<u>補題</u> **10.7.** 開集合 $U \subset \mathbb{R}^m$ と $V \subset \mathbb{R}^n$、開集合 $U_0 \subset U$ 上滑らかである連続写像 $f\colon U \to V$ が与えられた、任意の連続写像 $\epsilon\colon U \to (0, \infty)$ と閉集合 $A \subset U_0$ に対して、次の性質 (i)–(ii) を満たす滑らかな写像 $\phi\colon U \to V$ が存在する。

(i) 任意の $x \in U$ に対して、$\|\phi(x) - f(x)\| < \epsilon(x)$

(ii) 任意の $x \in A$ に対して、$\phi(x) = f(x)$

<u>証明</u>. まず、$V = \mathbb{R}^n$ であることを仮定する。写像 f と ϵ は連続なので、任意の $p \in U \smallsetminus A$ に対して、次の性質を満たす開近傍 $p \in U_p \subset U \smallsetminus A$ が存在する。「任意の $x \in U_p$ に対して $\|f(x) - f(p)\| < \epsilon(x)$」開集合 U_0 と U_p（$p \in U \smallsetminus A$）は開集合 U の開被覆となるので、1 の分解より、定理 8.1 の (i)–(iii) を満たす滑らかな写像 $\phi_0, \phi_p\colon U \to [0, 1]$（$p \in U \smallsetminus A$）が成り立つ。よって、次のようにうまく定義された滑らかな写像 $\phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ が成り立つ。

$$\phi(x) = \phi_0(x) f(x) + \sum_{p \in U \smallsetminus A} \phi_p(x) f(p)$$

定理 8.1 の性質 (iii) より、

$$f(x) = \phi_0(x) f(x) + \sum_{p \in U \smallsetminus A} \phi_p(x) f(x)$$

なので、

$$\phi(x) - f(x) = \sum_{p \in U \smallsetminus A} \phi_p(x)(f(p) - f(x))$$

であることが分かる。ここで、$\mathrm{supp}_U(\phi_p) \subset U_p \subset U \smallsetminus A$ なので、任意の $x \in A$ に対して、$\phi(x) = f(x)$ であり、任意の $x \in U$ に対して、

$$\|\phi(x) - f(x)\| \leqslant \sum_{p \in U \smallsetminus A} \phi_p(x) \|f(p) - f(x)\| < \sum_{p \in U \smallsetminus A} \phi_p(x) \epsilon(x) \leqslant \epsilon(x)$$

であることが分かる。これで、$V = \mathbb{R}^n$ のとき、補題が成り立つ。

最後に、$V \subset \mathbb{R}^n$ は一般の開集合のとき、与えられた写像 $\epsilon\colon U \to (0, \infty)$ に対して、次のように定義された写像 $\epsilon'\colon U \to (0, \infty)$ を考える。

$$\epsilon'(x) = \min\{\epsilon(x), d(f(x), \mathbb{R}^n \smallsetminus V)\}$$

ここで、$d(y, \mathbb{R}^n \smallsetminus V) = \inf\{\|y - z\| \mid z \in \mathbb{R}^n \smallsetminus V\}$ である。このとき、写像 ϵ' によって性質 (i) を満たす写像 $\phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ は、必ず $\phi(U) \subset V$ も満たす。これで、補題が成り立つ。 □

命題 10.8. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^m$ と $V \subset \mathbb{R}^n$ をおいておく。

(i) 任意の連続写像 $f\colon U \to V$ に対して、f とホモトピックである滑らかな写像 $\phi\colon U \to V$ が存在する。

(ii) 任意の滑らかな写像 $\phi_0, \phi_1\colon U \to V$ に対して、ϕ_0 と ϕ_1 がホモトピックならば、次の性質を満たす滑らかな写像 $\Phi\colon U \times \mathbb{R} \to V$ が存在する。「任意の $x \in U$ に対して、$\Phi(x, 0) = \phi_0(x)$ かつ $\Phi(x, 1) = \phi_1(x)$」

証明. (i) 連続写像 $\epsilon\colon U \to (0, \infty)$ が与えられた、補題 10.7 より、任意の $x \in U$ に対して、

$$\|\phi(x) - f(x)\| < \epsilon(x)$$

を満たす滑らかな写像 $\phi\colon U \to V$ が存在する。今、$V \subset \mathbb{R}^n$ は開集合なので、任意の $x \in U$ に対して、

$$D_{\epsilon(x)}(f(x)) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - f(x)\| < \epsilon(x)\} \subset V$$

を満たす連続写像 $\epsilon\colon U \to V$ を選ぶことができる。よって、例 10.6 より、ϕ と f はホモトピックであることが分かる。

(ii) 補題 6.1 より、次の性質を満たす滑らかな関数 $\psi\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ を選ぶことができる。

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & (t \leqslant \frac{1}{3}) \\ 1 & (t \geqslant \frac{2}{3}) \end{cases}$$

今、ϕ_0 から ϕ_1 へのホモトピー $F\colon U \times [0, 1] \to V$ が与えられた、まず次のように定義された連続写像 $G\colon U \times \mathbb{R} \to V$ を考えてみる。

$$G(x, t) = F(x, \psi(t))$$

写像 $\phi_0, \phi_1\colon U \to \mathbb{R}$ は滑らかなので、開部分集合 $U \times (-\infty, \frac{1}{3}) \cup U \times (\frac{2}{3}, \infty) \subset U \times \mathbb{R}$ 上、写像 $G\colon U \times \mathbb{R} \to V$ も滑らかな写像であることが分かる。それに、$U \times \{0, 1\} \subset U \times \mathbb{R}$ は閉集合なので、補題 10.7 より、任意の $(x, t) \in U \times \{0, 1\}$ に対して、$\Phi(x, t) = G(x, t)$ を満たす滑らかな写像 $\Phi\colon U \times \mathbb{R} \to V$ が存在する。これで、命題が成り立つ。 □

注 10.9. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^m$ と $V \subset \mathbb{R}^n$、滑らかな写像 $\phi, \psi\colon U \to V$ について、任意の $x \in U$ に対して、$\Phi(x, 0) = \phi(x)$ かつ $\Phi(x, 1) = \psi(x)$ を満たす滑らかな写像 $\Phi\colon U \times \mathbb{R} \to V$ は、ϕ から ψ への滑らかなホモトピーと呼ばれる。よって、命題 10.8 より、ϕ から ψ へのホモトピーが存在することと ϕ から ψ への滑らかなホモトピーが存在することは同値である。