1　序文

開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ と滑らかな写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ をおいておく。写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ もベクトル場と呼ばれる。

<u>質問</u> 1.1. ベクトル場 $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ に対して、ポテンシャル $F\colon U \to \mathbb{R}$ が存在するか。

ここで、関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ は、ベクトル場 $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ のポテンシャルであることは、F は次の微分方程式を満たすことである。

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2.$$

ポテンシャル $F\colon U \to \mathbb{R}$ が存在する場合には、事実

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}$$

によって、ベクトル場 $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ は、必ず次の等式を満たさなければならない。

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}.$$

この等式を満たすベクトル場 $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ は、保存ベクトル場と呼ばれる。よって、質問 1.1 の代わりに、次の質問を答えればよい。

<u>質問</u> 1.2. 保存ベクトル場 $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ に対して、ポテンシャル $F\colon U \to \mathbb{R}$ が存在するか。

<u>例</u> 1.3. 次のように定義されたベクトル場 $f\colon U = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ を考えて見る。

$$f(x_1, x_2) = \left(\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right).$$

次の計算は、$f\colon U \to \mathbb{R}^2$ が保存ベクトル場であることを示す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \frac{1 \cdot (x_1^2 + x_2^2) - x_1 \cdot 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= \frac{-1 \cdot (x_1^2 + x_2^2) - (-x_2 \cdot 2x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \end{aligned}$$

ポテンシャル $F\colon U \to \mathbb{R}^2$ が存在することを仮定し、次の線積分を計算する。

$$\int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta} F(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = F(1,0) - F(1,0) = 0.$$

一方、連鎖律の公式によって、

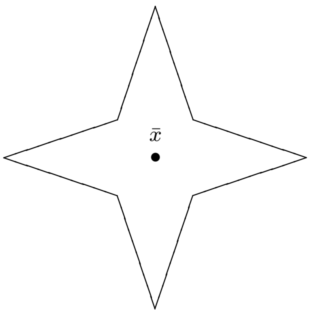
$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}F(\cos\theta,\sin\theta) &= \frac{\partial F}{\partial x_1}(\cos\theta,\sin\theta)\cdot(-\sin\theta)+\frac{\partial F}{\partial x_2}(\cos\theta,\sin\theta)\cdot\sin\theta \\ &= f_1(\cos\theta,\sin\theta)\cdot(-\sin\theta)+f_2(\cos\theta,\sin\theta)\cdot\cos\theta \\ &= 1\end{aligned}$$

となるので、線積分も次の値を与える。

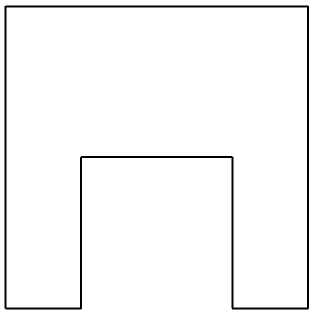
$$\int_0^{2\pi}\frac{d}{d\theta}F(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}1\cdot d\theta=2\pi.$$

しかし、明らかに $0\neq 2\pi$ なので、ポテンシャル $F\colon U\to\mathbb{R}$ が存在することはできないとわかる。

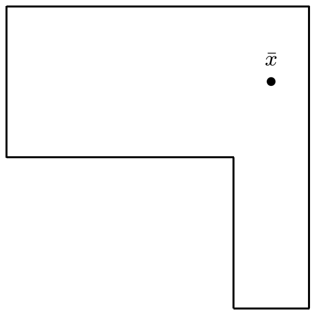
定義 **1.4.** 次の性質を満たす部分集合 $X\subset\mathbb{R}^n$ は星形集合と呼ばれる。「点 $\bar{x}\in X$ が存在し、各点 $x\in X$ と任意の $t\in[0,1]$ に対して、$tx+(1-t)\bar{x}\in X$」



星形集合



星形でない集合



星形集合

部分集合 $X\subset\mathbb{R}^n$ が星形集合であることは、集合の任意の点 x が一つの点 $\bar{x}$ から見えることと同値である。次の定理を復習する。

定理 **1.5.** 星形の開集合 $U\subset\mathbb{R}^2$ に対して、任意の保存ベクトル場 $f\colon U\to\mathbb{R}^2$ のポテンシャル

$$F\colon U\to\mathbb{R}$$

が存在する。

証明. 開集合 U は点 $(0,0)$ によって星形集合であることを仮定し、次のように定義された関数 $F\colon U\to\mathbb{R}$ を考えてみる。

$$F(x_1,x_2)=\int_0^1\left(x_1f_1(tx_1,tx_2)+x_2f_2(tx_1,tx_2)\right)dt.$$

ベクトル場 $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ は保存なので、積分

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \int_0^1 \left(f_1(tx_1,tx_2) + tx_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx_1,tx_2) + tx_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(tx_1,tx_2) \right) dt$$

と微分

$$\frac{d}{dt}\left(tf_1(tx_1,tx_2)\right) = f_1(tx_1,tx_2) + tx_1\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(tx_1,tx_2) + tx_2\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(tx_1,tx_2)$$

を比べると、等式

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1$$

が成り立つ。同様に、

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2.$$

よって、関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ は、ベクトル場 $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ のポテンシャルである。 $\square$

例 1.3 と復習した定理 1.5 を比べると、質問の答えは地域のトポロジーによって違っていることがわかる。質問 1.2 を一般的に答えられるために、次のように地域 U の不変量 $H^1(U)$ を定義する。先ず、次のベクトル空間と線形写像を考えてみる。

$$C^\infty(U,\mathbb{R}) \xrightarrow{\quad\mathrm{grad}\quad} C^\infty(U,\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\quad\mathrm{rot}\quad} C^\infty(U,\mathbb{R}) \tag{1.6}$$

ここで、勾配と呼ばれる線形写像 grad と回転と呼ばれる線形写像 rot は、次のように定義された線形写像である。

$$\mathrm{grad}(F) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right), \qquad \mathrm{rot}(f) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}.$$

この線形写像に関して、保存ベクトル空間のなすベクトル空間とポテンシャルを持つベクトル空間が次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \ker(\mathrm{rot}) &= \{\,\text{保存ベクトル場 } f\colon U \to \mathbb{R}^2\} & (\ker = \text{核}) \\ \mathrm{im}(\mathrm{grad}) &= \{\,\text{ポテンシャルを持つベクトル場 } f\colon U \to \mathbb{R}^2\} & (\mathrm{im} = \text{像}) \end{aligned}$$

それに、次の計算は、合成写像 $\mathrm{rot}\circ\mathrm{grad}$ はゼロであることを示す。

$$(\mathrm{rot}\circ\mathrm{grad})(F) = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}(F)) = \mathrm{rot}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = 0.$$

よって、ベクトル空間 $\mathrm{im}(\mathrm{grad})$ は、ベクトル空間 $\ker(\mathrm{rot})$ の部分空間である。不変量 $H^1(U)$ は次の商ベクトル空間と定義される。

定義 **1.7.** $H^1(U) = \ker(\mathrm{rot})/\operatorname{im}(\mathrm{grad})$.

ここで、ベクトル空間 W と部分空間 $V \subset W$ に対して、商空間 W/V は次の剰余類のなすベクトル空間と定義される。

$$
\begin{aligned}
&W/V = \{w + V \mid w \in W\} \\
&(w+V) + (w'+V) = (w+w') + V \qquad (w, w' \in W) \\
&a(w+V) = (aw) + V \qquad (a \in \mathbb{R}, w \in W)
\end{aligned}
$$

空集合でない開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ に対して、ベクトル空間 $\ker(\mathrm{rot})$ と部分空間 $\operatorname{im}(\mathrm{grad})$ は、無限次元のベクトル空間である。しかし、商空間 $H^1(U)$ は有限次元ベクトル空間であることよくある。不変量を使い、質問 1.2 が次のように表すことができる。

質問 1.8. ベクトル空間 $H^1(U)$ はゼロであるか。

定理 1.5 は、「星形の開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ に対して、$H^1(U)$ はゼロである」とあらわし、例 1.3 は、「開集合 $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ の場合には、$H^1(U)$ はゼロではい」と表す。後者のベクトル空間は 1 次元のベクトル空間であることが証明できる。一般的に、開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ に対して、ベクトル空間 $H^1(U)$ の次元は、地域 U の穴の数と等しいであることが証明できる。

開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ に対して、次の三つのベクトル空間が定義される。

$$
\begin{aligned}
H^0(U) &= \ker(\mathrm{grad}) \\
H^1(U) &= \ker(\mathrm{rot})/\operatorname{im}(\mathrm{grad}) \\
H^2(U) &= C^\infty(U, \mathbb{R})/\operatorname{im}(\mathrm{rot})
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

定理 **1.10.** 開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ に対して、次の性質（１）ー（２）は同値である。

（１）ベクトル空間 $H^0(U)$ は 1 次元のベクトル空間である。

（２）地域 U は連結である。

証明. 滑らかな関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ に関して、性質「$\mathrm{grad}(F) = 0$ である」と「F は局所定関数である」は同値である。それで、「$H^0(U)$ は 1 次元である」と「任意の局所定関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ は定関数である」は同値である。

(2) $\Rightarrow$ (1)：関数 F は連続なので、点 $\bar{x} \in U$ に対して、部分集合

$$A = \{x \in U \mid F(x) = F(\bar{x})\} = F^{-1}(F(\bar{x})) \subset U$$

は閉集合である。それに、F は局所定款数なので、集合 A も開集合である。集合 U は連結なので、$A = \varnothing$ と $A = U$ の開かつ閉である部分集合しか存在しない。$\bar{x} \in A$ なので、$A = U$。よって、F は定款数なので、次のように定義された線形写像は同型になる。

$$\epsilon\colon H^0(U) \to \mathbb{R}, \qquad \epsilon(F) = F(\bar{x})$$

よって、$\dim H^0(U) = 1$.

(1) $\Rightarrow$ (2)：集合 U は連結でない場合には、滑らかな全射 $F\colon U \to \{0,1\}$ が存在する。この関数 F は定関数でない局所定関数なので、$\dim H^0(U) > 1$ になる。 $\square$

最後に、３次元のベクトル解析の場合には、開集合 $U \subset \mathbb{R}^3$ に対して、次のベクトル空間と線形写像を考えてみる。

$$C^\infty(U,\mathbb{R}) \xrightarrow{\quad \mathrm{grad} \quad} C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\quad \mathrm{rot} \quad} C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\quad \mathrm{div} \quad} C^\infty(U,\mathbb{R}) \tag{1.11}$$

ここで、勾配 grad 及び回転 rot、発散 div は次のように定義された線形写像である。

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}(F) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3}\right)\\
\mathrm{rot}(f) &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\\
\mathrm{div}(f) &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}
\end{aligned}$$

開集合 $U \subset \mathbb{R}^3$ に対して、次の不変量は定義される。

$$\begin{aligned}
H^0(U) &= \ker(\mathrm{grad})\\
H^1(U) &= \ker(\mathrm{rot})/\operatorname{im}(\mathrm{grad})\\
H^2(U) &= \ker(\mathrm{div})/\operatorname{im}(\mathrm{rot})\\
H^3(U) &= C^\infty(U,\mathbb{R})/\operatorname{im}(\mathrm{div})
\end{aligned} \tag{1.12}$$

この不変量に対して、「$H^0(U)$ はゼロである」と「U は連結である」は同値であり、「$H^1(U)$ はゼロである」と「任意の保存ベクトル場に対して、ポテンシャルが存在する」は同値であり、「$H^2(U)$ はゼロである」と「任意の発散はゼロのベクトル場に対して、ベクトルポテンシャルが存在する」は同値である。