

名古屋大学 共通教育科目

# 数学基礎Ⅱ・Ⅳ 講義録

## 第4章

担当：金井 雅彦



## 第4章

### 行列式

#### A 置換

さて、いよいよ行列式の話を始めるときがきました。というのも、この行列式と呼ばれる概念は、初等的な線形代数（つまりこの講義で扱っている内容）の中では次章で登場するはずの固有値と並んで最難関と称される代物で、しばしば初学者を混乱させ、ときには彼らの数学に対する学習意欲を挫くことさえあり得ます。もしかすると皆さんもそのような目に遭うかも知れません。しかし心配には及びません。いやそれどころか、次節で述べるはずの行列式の定義だけ見て、何の抵抗も無く受け入れられるとしたら、そのほうが問題なのかも知れません。たとえば行列式の定義は、単に形式的な観点からすれば、何の矛盾も誤りも含んではいません。もし仮に数学が形式的論理操作に過ぎないなら、異論を挟む余地はないはずです。でも、そもそもなぜそんな定義をするのでしょうか。ともかく、「意味」の理解し難い、あるいは極端に技巧的に見える定義なのです。しかし、私たち生きた人間が行う数学には、そしてそこでなされる「定義」には、「目的」があり「意義」があります。あるいは言い換えるならば、その定義があって初めて理解される事実があるのです。現に行列式というのは、定義は不可解かも知れないけれど、その有効性はそれを知る者にとっては異議の唱えようのないものです。定義だけでは理解し難い、そんな概念が、実は数学の中には少なからず存在します。そういったものたちは、他の概念との関係において、あるいは応用上の有効性を通じて、初めて本当の意味・意義が理解されます。行列式に関してもまさにこれが当てはまります。すなわち、行列式は単にその定義を眺めて理解するものではなく、その意味をいろいろな定理や応用を介し理解すべきものだということを承知したうえで、実際にその勉強を始めて欲しいと思います。

ちょっと前置きが長くなり過ぎたかもしれませんが、ともかく行列式の定義のための準備を始めましょう。そのために、とくに置換と呼ばれるものについて勉強するのがこの節の目的です。

1以上 $n$ 以下の整数のなす集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ からそれ自身の上への全単射を, $n$ 次の置換と言います. $n$ 次の置換 $\sigma$ が与えられたとき,表

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

はその置換 $\sigma$ を完全に決定することは言うまでもありません.そこで,しばしばこの表自身を置換 $\sigma$ と同一視します.ところで,この表の第2行には,1以上 $n$ 以下の整数がちょうど1回ずつ現れます.言い換えれば,第2行は $\{1, 2, \dots, n\}$ の順列に他なりません.このことから, $n$ 次の置換は全部で $n!$ 個あることがわかります.今後, $n$ 次の置換全部がなす集合を, $S_n$ で表すことにしましょう.いま,ふたつの置換 $\sigma, \tau \in S_n$ が与えられたとします.定義によれば,それらはともに集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ からそれ自身の上への全単射でしたから,合成写像 $\tau \circ \sigma$ もまた $\{1, 2, \dots, n\}$ からその上への全単射,すなわち, $n$ 次の置換になります.この置換 $\tau \circ \sigma$ を,もとのふたつの置換 $\sigma, \tau$ の積と呼び記号 $\tau\sigma$ により表します.また, $\sigma$ が $n$ 次置換ならば,その逆写像 $\sigma^{-1}$ もふたたび $n$ 次置換になります. $\sigma^{-1}$ は,もとの置換 $\sigma$ の逆置換と呼ばれ, $\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \iota$ を満たします.ただし, $\iota$ は恒等置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を表します.さて,置換の積と逆置換に関する簡単な問題を出しますので,各自考えてみて下さい.

#### 問題 4.1.

##### 4次置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

に対し,積 $\tau\sigma$ ,および逆置換 $\sigma^{-1}$ を求めよ.

置換 $\sigma$ は1を2に移します.一方,置換 $\tau$ による2の像は1です.したがって,これらの置換の積 $\tau\sigma$ は1をそれ自身に移すことが分かります.こんな仕方でも積 $\tau\sigma$ が求められます.実際,

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

が答えになるはずですが,まだ分からない人は,図4.1を参考にして下さい.それでは, $\sigma$ の逆についてはどうでしょう.先程も述べたように $\sigma$ 自身はたとえば1を2に送りますから, $\sigma^{-1}$ は逆に2を1に写像することになります.同様な観察を2,3,4に対しても行うことにより,

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

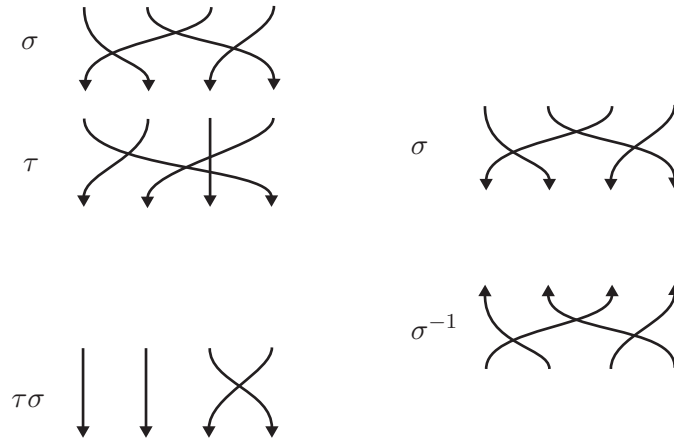


図 4.1: 置換の積と逆置換

を得ます .

さて,  $\sigma \in S_n$  としましょう . 各  $i, j$  (ただし,  $1 \leq i < j \leq n$ ) に対し,  $\gamma_\sigma(i, j)$  を,

$$\gamma_\sigma(i, j) = \begin{cases} 0 & (\sigma(i) < \sigma(j) \text{ のとき}) \\ 1 & (\sigma(i) > \sigma(j) \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定義します . また, さらに

$$\Gamma_\sigma = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \gamma_\sigma(i, j)$$

と置きます . この  $\Gamma_\sigma$  は次のように解釈することが可能です . とくに  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  の場合を例に取ることしましょう . まず, 平面内に横 1 列に 4 個の点を取り, それらを左から順に,  $P_1, P_2, P_3, P_4$  と呼ぶことにします . さらに, それらの点の真下に再び 4 個の点を置き, それぞれを左から順に  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  と呼びましょう . ここで, 置換  $\sigma$  に着目します .  $\sigma$  はとくに 1 を 4 に移します . そこで, 先程の図において上側にある点  $P_1$  と下側の点  $Q_4$  を曲線で結んで下さい . ただし, その曲線を  $P_1$  から  $Q_4$  に向けて引くとしたとき, 途中決して, 上に向かったり, 左に向かったりしてはいけません . また, 置換  $\sigma$  は, 2 を 3 に移しますから,  $P_2$  と  $Q_3$  を, 同じ規則に従って曲線で結びます . このような仕方ですべての番号  $i$  に対し,  $P_i$  と  $Q_{\sigma(i)}$  を曲線で結ぶことにより, 図が完成します . ただし, 完成した図において, 3 本以上の曲線が 1 点で交わることがないように曲線を引いて下さい . その結果得られるのは, 図 4.2 にあるような, あみだくじに似た図形です . その図形に現れる曲線達の交点の総数を数えると, この場合 5 になります . そして, この数が  $\Gamma_\sigma$  に他なりません . 一般の置換  $\sigma$  に対しても,  $\Gamma_\sigma$  が同じ仕方ですべて計算可能です .

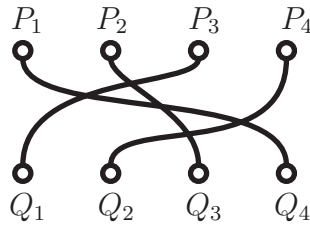


図 4.2:  $\Gamma_\sigma$  の求め方

置換  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  から作られたあみだくじ. この場合, 交点の個数は 5 であるから,  $\Gamma_\sigma = 5$  であることが分かる.

置換  $\sigma \in S_n$  に対し,

$$\text{sgn } \sigma = (-1)^{\Gamma_\sigma}$$

で定義される数  $\text{sgn } \sigma$  を,  $\sigma$  の符号 (sign) と呼びます. あるいは別の言い方をすれば,  $\Gamma_\sigma$  が偶数のとき  $\text{sgn } \sigma = 1$  と, また  $\Gamma_\sigma$  が奇数のとき  $\text{sgn } \sigma = -1$  と定義するわけです. 例えば前出の  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  に対しては, 図 4.2 より  $\Gamma_\sigma = 5$  を得ますから,  $\text{sgn } \sigma = -1$  であることが分かります.

符号の有する最も重要な性質として, 次に述べるようなものがあります.

命題 4.2.   
 $\sigma, \tau \in S_n$  に対し,

$$\text{sgn}(\tau\sigma) = \text{sgn } \tau \cdot \text{sgn } \sigma \tag{4.1}$$

が成り立つ.

この命題の証明に用いられるアイデアを明らかにするために, 問題をひとつ解いてもらいましょう. 本当に簡単な問題ですので, 是非自分自身で考えてみて下さい.

問題 4.3.

$2N$  枚のカードがある. ただし, そのうちの  $p$  枚は白色, また残りは黒色であるとする. それらのカードを,  $N$  人の人達にひとり当たり 2 枚ずつ配る. このとき, 白色のカード, 黒色のカードをそれぞれ 1 枚ずつもらった人の人数を  $q$  人としたとき,  $q$  が偶数であるための必要十分条件は, 白色のカードの枚数  $p$  が偶数であることを示せ.

---

白色のカードのみを 2 枚受け取った人の人数を  $r$  とすると, 白色のカードが合計  $p$  枚あることから,  $p = q + 2r$  が成り立たねばなりません. とくに  $p$  と  $q$  の差は偶数になりま

す．そしてこれより， $p, q$  の偶奇が一致することがただちに分かります．以上が，問題 4.3 に対する解答です．

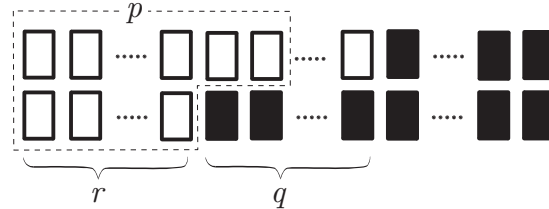


図 4.3:

さて，命題 4.2 の証明を始めましょう．記述を容易にするために， $\gamma_\sigma(i, j)$  (ただし， $\sigma \in S_n$ ) を， $i > j$  の場合にも， $\gamma_\sigma(i, j) = \gamma_\sigma(j, i)$  と定義することにより，拡張しておきます．すると， $i, j$  の大小関係と  $\sigma(i), \sigma(j)$  のそれとが一致するとき，およびそのときに限り  $\gamma_\sigma(i, j)$  は値ゼロをとります．あるいは，このことは，

$$\gamma_\sigma(i, j) = \begin{cases} 0 & ((i - j)(\sigma(i) - \sigma(j)) > 0 \text{ のとき}) \\ 1 & ((i - j)(\sigma(i) - \sigma(j)) < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(ただし， $i \neq j$ ) の様書き表すことも可能です．いま， $\sigma, \tau \in S_n$  を任意にとりましょう．このとき，各  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  (ただし， $i \neq j$ ) に対し，次の事実が成り立つことが容易に分かります．

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_\sigma(i, j) = 0 \quad \text{かつ} \quad \gamma_\tau(\sigma(i), \sigma(j)) = 0 \quad \implies \quad \gamma_{\tau\sigma}(i, j) = 0 \\ \gamma_\sigma(i, j) = 0 \quad \text{かつ} \quad \gamma_\tau(\sigma(i), \sigma(j)) = 1 \quad \implies \quad \gamma_{\tau\sigma}(i, j) = 1 \\ \gamma_\sigma(i, j) = 1 \quad \text{かつ} \quad \gamma_\tau(\sigma(i), \sigma(j)) = 0 \quad \implies \quad \gamma_{\tau\sigma}(i, j) = 1 \\ \gamma_\sigma(i, j) = 1 \quad \text{かつ} \quad \gamma_\tau(\sigma(i), \sigma(j)) = 1 \quad \implies \quad \gamma_{\tau\sigma}(i, j) = 0 \end{array} \right. \quad (4.2)$$

実際，例えば第 1 の主張は，次のようにして示されます．まず， $\gamma_\sigma(i, j) = \gamma_\tau(\sigma(i), \sigma(j)) = 0$  と仮定しましょう．すると， $(i - j)(\sigma(i) - \sigma(j))$  および  $(\sigma(i) - \sigma(j))((\tau\sigma)(i) - (\tau\sigma)(j))$  の値はともに正でなければならないことが分かります．したがって，それらの積  $(i - j)(\sigma(i) - \sigma(j))^2((\tau\sigma)(i) - (\tau\sigma)(j))$  も正でなければなりません．これより， $(i - j)((\tau\sigma)(i) - (\tau\sigma)(j)) > 0$ ，すなわち， $\gamma_{\tau\sigma}(i, j) = 0$  であることが従います．

さて， $1 \leq i < j \leq n$  なる整数  $i, j$  の組  $(i, j)$  を，問題 4.3 の人達に見立てます．あるいは，合計  $N = n(n - 1)/2$  人の人達のおのおのに， $(i, j)$  (ただし， $i, j$  は  $1 \leq i < j \leq n$  なる整数) といった少々風変わりなゼッケンが与えられているとします．もし  $\gamma_\sigma(i, j) = 1$  ならば白色のカードを 1 枚，また逆に  $\gamma_\sigma(i, j) = 0$  ならば黒色のカードを 1 枚，ゼッケン

$(i, j)$  の人に与えます。次いで、 $\gamma_\tau(\sigma(i), \sigma(j)) = 1$  ならば白色のカードを1枚、また  $\gamma_\tau(\sigma(i), \sigma(j)) = 0$  ならば黒色のカードを1枚、さらにゼッケン  $(i, j)$  の人にあげることにしましょう。この規則に従い、各々の人に2枚ずつカードを配布します。このとき、(4.2)によれば、白色・黒色のカードをそれぞれ1枚ずつ受け取った人の数は、

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \gamma_{\tau\sigma}(i, j) = \Gamma_{\tau\sigma}$$

に等しくなります。一方、白色のカードの総数は

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i < j \leq n} \gamma_\sigma(i, j) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \gamma_\tau(\sigma(i), \sigma(j)) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \gamma_\sigma(i, j) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \gamma_\tau(i, j) = \Gamma_\sigma + \Gamma_\tau \end{aligned}$$

でなければなりません。したがって、問題4.3によれば、 $\Gamma_{\tau\sigma}$  と  $\Gamma_\sigma + \Gamma_\tau$ 、これらふたつの数の偶奇は一致することが結論されます。そしてこれより、

$$\operatorname{sgn}(\tau\sigma) = (-1)^{\Gamma_{\tau\sigma}} = (-1)^{\Gamma_\sigma + \Gamma_\tau} = (-1)^{\Gamma_\sigma} \cdot (-1)^{\Gamma_\tau} = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \tau,$$

すなわち、等式(4.1)を得ます。以上で、命題4.2の証明が完了しました。

系 4.4.

任意の置換  $\sigma$  とその逆置換  $\sigma^{-1}$  に対し、

$$\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn} \sigma$$

が成り立つ。

この系を命題4.2から導くには、 $\sigma^{-1}\sigma = \iota$  が成り立つこと、および、恒等置換  $\iota$  の符号が1であることに気付けば十分です。

与えられた置換  $\sigma$  に対し、それから図4.2のような絵を描き、そこに現れる交点の数を数え上げることにより、 $\sigma$  の符号  $\operatorname{sgn} \sigma$  を計算出来ることは、すでに述べたとおりです。しかし、命題4.2を利用すれば、これ以外の方法でも  $\sigma$  の符号を計算することが可能になります。それについて述べることにしましょう。 $n$  次置換  $\sigma$  であって、あるふたつの番号  $p, q$  (ただし、 $1 \leq p < q \leq n$ ) のみを入れ替えるものを互換といいます。あるいは、より正確な言い方をすれば、ある  $p, q$  (ただし、 $1 \leq p < q \leq n$ ) に対し、

$$\sigma(i) = \begin{cases} \sigma(q) & (i = p \text{ のとき}) \\ \sigma(p) & (i = q \text{ のとき}) \\ i & (\text{上記以外の場合}) \end{cases}$$



を満たすような置換  $\sigma$  を互換と呼ぶわけです．また，この定義において，とくに  $p, q$  が隣り合う整数，すなわち  $q = p + 1$  が成り立つとき， $\sigma$  を隣接置換と呼ぶことにしましょう．もちろん，隣接置換の符号は  $-1$  です．一方，任意の互換は隣接置換を奇数回行うことにより得られます．すなわち， $\sigma$  を任意の互換としたとき，奇数個の隣接置換  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{2k+1}$  を適当にとれば， $\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{2k+1}$  が成り立ちます．したがって，命題 4.2 より， $\text{sgn } \sigma = \text{sgn } \tau_1 \cdot \text{sgn } \tau_2 \cdots \text{sgn } \tau_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$  を得ます．つまり，いかなる互換も符号  $-1$  を持つことが分かった訳です．なお，この事実は図 4.4 のような図を利用しても，検証可能です．

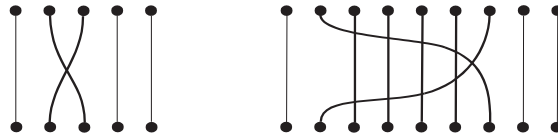


図 4.4:

隣接置換，あるいはより一般に互換の符号は常に  $-1$  である．この事実は図からも容易に理解されよう．

さて， $\sigma$  を任意の置換としましょう．このとき  $\sigma$  は適当な互換の積に分解できます．すなわち， $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$  なる互換  $\tau_1, \dots, \tau_k$  が必ず存在します．このとき，再び命題 4.2 によれば， $\text{sgn } \sigma = \text{sgn } \tau_1 \cdots \text{sgn } \tau_k = (-1)^k$  が成り立たなければなりません．そして，これより次を得ます．

系 4.5. 置換  $\sigma$  が，偶数個の互換の積に分解されるならば， $\text{sgn } \sigma = 1$  が成り立つ．また，逆に奇数個の互換の積に分解されるならば， $\text{sgn } \sigma = -1$  が成り立つ．

この系の応用として，次のような問題を考えてみて下さい．

問題 4.6. 3 次の置換すべてを求めよ．また，それらのおおのの符号を計算せよ．

解答．3 次の置換が，図 4.5 に現れるものに尽きることは，明らかである．しかも，その図において各矢印の右側にある置換は，その左側にある置換に適当な互換をひとつ左から乗ずることにより得られる．したがって，その図において左端に現れる恒等置換  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ，および右端に現れるふたつの置換  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ， $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  の符号は  $1$ ，また残り 3 個の置換の符号は  $-1$  であることも，系 4.5 より結論される．

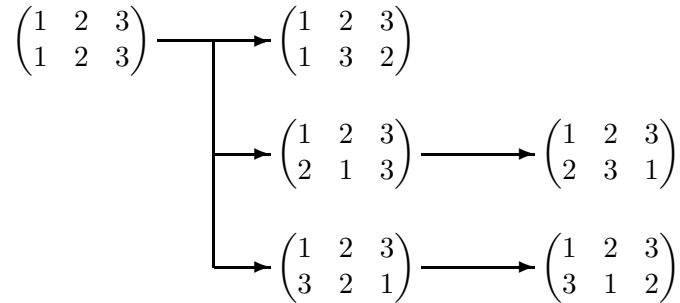


図 4.5: 3 次の置換

## B 行列式

$n$  次正方行列  $A = (a_{ij})$  に対し,

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \quad (4.3)$$

により定義される実数  $\det A$  を, 行列  $A$  の行列式と呼びます. ここで右辺の和は  $n$  次置換全体に渡るものであることに注意して下さい. そして, この行列式こそが, この章の主役です.

まず,  $n$  が小さいときに, 行列式は具体的にどのような形をしているかを調べてみましょう. 最初に  $n = 2$  の場合を考えます. 2 次の置換は  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , および  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  の合計ふたつしかありません. しかも, それらの符号はそれぞれ  $1, -1$  であることから, ただちに

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \quad (4.4)$$

を得ます. 次に,  $n = 3$  の場合ですが, とりあえずこれは問題としますので, 各自考えてみて下さい.

問題 4.7. \_\_\_\_\_

3 次正方行列

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

の行列式を書き下せ.

\_\_\_\_\_

実は、この問題に対する解答は、前節の問題 4.6 に対するそれを用い、行列式の定義を書き直すことにより、直ちに得られます。実際、答えは

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

すなわち、

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{pmatrix} = aqz + brx + cpy - cqx - bpz - ary \quad (4.6)$$

となるはずです。

ここで、公式 (4.6) の暗記法をお教えしましょう。そのために、行列 (4.5) と同じものを多数取り、それを横一列に並べます。そして、その一番上の行の各成分から、右下、および左下に向けて線分を引きます(図 4.6)。このとき、右下に向けて引かれた線分のおのに乗っている文字を乗ずると、 $aqz, brx, cpy$  合計 3 種類のものが得られます。ところが、これらはまさに、公式 (4.6) の右辺に現れる項のうち、その符号が正のものそのものです。一方、左下に向けて引かれた線分上に乗っている文字を掛け合わせると、(4.6) の右辺の項のうち、その符号が負のもの、すなわち、 $cqx, bpz, ary$  が得られます。このような仕方では、図 4.6 から、公式 (4.6) を容易に再現することが出来ます。ただし、3 次正方行列に対してたったいま行ったことと同様あるいは類似なことを行って、4 次以上の正方行列に対してその行列式を計算しようとする、一般には誤った結果に導かれることに注意して下さい。言い換えるならば、4 次以上の正方行列の行列式に対しては、このような簡単な仕方では、行列式は計算出来ません。

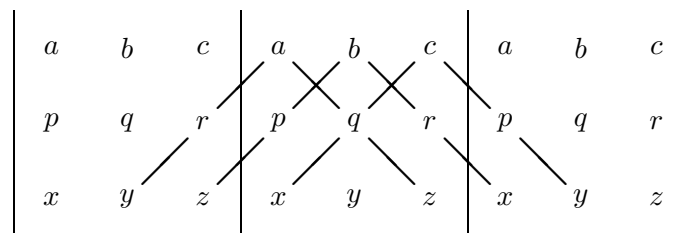


図 4.6: 3次正方行列の行列式の覚え方

しかし、単純な形をした行列に関しては、それが高次であっても、その行列式が容易に計算できる場合があります。その典型的な例が三角行列です。  $A = (a_{ij})$  を  $n$  次正方行列と

したとき,  $i < j$  なる任意の  $i, j$  に対し  $a_{ij} = 0$  が成り立つならば,  $A$  を下三角行列と, また  $i > j$  なる任意の  $i, j$  に対し  $a_{ij} = 0$  が成り立つならば,  $A$  は上三角行列と呼ばれます. 下三角行列は

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ * & \lambda_2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ * & \cdots & * & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

の形を, また上三角行列は

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

の形をしています. ただし,  $*$  は任意の実数を表します. さて, これら三角行列の行列式の計算を, 問題として皆さんに解いてもらいましょう.

問題 4.8. \_\_\_\_\_

(4.7), あるいは (4.8) の形をした三角行列に対し, その行列式を計算せよ.

\_\_\_\_\_

問題に対する解答を述べましょう. まず,  $A = (a_{ij})$  が, (4.7) の形をした下三角行列の場合を考えます. その行列式  $\det A$  は,

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \quad (4.9)$$

で定義されたことを思い起こしましょう. ここで, 行列  $A$  の第 1 行に注目します.  $A$  は下三角行列でしたから, とくに  $a_{12} = a_{13} = \cdots = a_{1n} = 0$  を満たします. したがって, (4.9) の総和に現れる  $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$  は,  $\sigma(1) = 1$  でない限りゼロになります. したがって, 行列式  $\det A$  の定義 (4.9) に現れる総和において,  $\sigma(1) = 1$  を, 置換  $\sigma$  に対する制約として課してもよいこととなります. あるいは, 言い換えれば,

$$\det A = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{11} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \quad (4.10)$$

が成り立ちます. 次に, 行列  $A$  の第 2 行に着目します.  $a_{2j}$  がゼロでないのは,  $j = 1, 2$  の場合のみです. したがって, (4.10) の総和においては,  $\sigma(2) = 1$ , または 2 の場合のみを考えればよいこととなります. ところが, すでに  $\sigma(1) = 1$  としていますから,  $\sigma(2)$  は値 1 を取り得ません. したがって, さらに  $\sigma(2) = 2$  を,  $\sigma$  に対する制約として追

加してよいこととなります．すなわち，

$$\det A = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1, \sigma(2)=2}} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{11} a_{22} a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

を得たわけです．以上の議論を繰り返せば，定義 (4.9) の右辺に現れる  $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$  は， $\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 2, \dots, \sigma(n) = n$ ，すなわち  $\sigma$  が恒等置換でない限り，値ゼロをとることが分かります．したがって，

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

が結論されます．

$A$  が (4.8) の形の上三角行列の場合にも，いまの議論を  $A$  の第 1 行から始める代わりに，一番下の行，すなわち第  $n$  行から始め，上の行へ遡っていくことにより，同一の結果

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

を得ます．以上が，問題 4.8 に対する解答です．

より一般的な行列に対しその行列式を計算する方法を得るための準備として，当分の間，行列式の有する基本的な性質に焦点を当てて話を進めていきたいと思えます．その手始めとして，まず次の命題を示しましょう．

命題 4.9.   
 $A$  を正方行列， ${}^t A$  をその転置行列としたとき，次の等式が成り立つ：

$$\det {}^t A = \det A \tag{4.11}$$

この命題は転置行列を使わないでも述べる事が可能です．実際，行列式および転置行列の定義から，(4.11) が等式

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \tag{4.12}$$

と同等であることが容易に判ります．

命題 4.9 の証明. 任意の  $\sigma \in S_n$  に対し， $a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$  が成り立つ．また，系 4.4 によれば， $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn} \sigma$  であった．よって，

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn} \tau \cdot a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} \\
&= \det A
\end{aligned}$$

を得る。ただし、最後から2番目の等式は、 $\tau = \sigma^{-1}$ の代入、および、各  $\sigma \in S_n$  に対し、 $\tau = \sigma^{-1} \in S_n$  を対応させる写像が  $S_n$  からそれ自身の上への全単射であることからの帰結である。以上で、等式 (4.12) の証明が、したがってまた命題 4.9 の証明も終了した。

□

次の目的は、行列の基本変形が行列式に対しどんな影響を与えるかを調べることです。

命題 4.10.  $|||||$   
 $A$  を  $n$  次正方行列とする。また、 $i \neq j$  とする。 $A$  の第  $i$  列と第  $j$  列を入れ替えることにより得られる行列を  $B'_I$  と、一方、行列  $A$  の第  $i$  列を、その列に実数  $\kappa$  を乗じたもので置き換えることにより得られる行列を  $B'_{II}$  とする。さらに、 $B'_{III}$  を、行列  $A$  の第  $i$  列を、その列に第  $j$  列に定数  $\kappa$  を乗じたものを加えて得られる行列とする：

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\text{(第 } i \text{ 列)} \leftrightarrow \text{(第 } j \text{ 列)}} & B'_I, \\
A & \xrightarrow{\text{(第 } i \text{ 列)} \leftrightarrow \text{(第 } i \text{ 列)} \times \kappa} & B'_{II}, \\
A & \xrightarrow{\text{(第 } i \text{ 列)} \leftrightarrow \text{(第 } i \text{ 列)} + \text{(第 } j \text{ 列)} \times \kappa} & B'_{III}.
\end{array}$$

また、行列の列に関する基本変形の代わりに、行に関する基本変形を適用して得られる行列を  $B''_I, B''_{II}, B''_{III}$  とする：

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\text{(第 } i \text{ 行)} \leftrightarrow \text{(第 } j \text{ 行)}} & B''_I, \\
A & \xrightarrow{\text{(第 } i \text{ 行)} \leftrightarrow \text{(第 } i \text{ 行)} \times \kappa} & B''_{II}, \\
A & \xrightarrow{\text{(第 } i \text{ 行)} \leftrightarrow \text{(第 } i \text{ 行)} + \text{(第 } j \text{ 行)} \times \kappa} & B''_{III}.
\end{array}$$

このとき、次が成り立つ：

- (1)  $\det B'_I = \det B'_{II} = -\det A,$
- (2)  $\det B'_{III} = \det B'_{III} = \kappa \cdot \det A,$
- (3)  $\det B''_I = \det B''_{II} = \det A.$

さて、この命題を利用すれば、任意の行列に対し、その行列式を比較的容易に計算することが可能です。命題の証明に先立って、それを問題として勉強することにしましょう。

問題 4.11.

行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  の行列式を計算せよ.

解答 . 命題 4.10 より ,

$$\begin{aligned}
 & \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & -3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(第 2 列)} \leftarrow \text{(第 2 列)} - \text{(第 1 列)} \times 2 \\ \text{(第 3 列)} \leftarrow \text{(第 3 列)} - \text{(第 1 列)} \times 2 \\ \text{(第 4 列)} \leftarrow \text{(第 4 列)} - \text{(第 1 列)} \times 2 \end{array} \right. \\
 &= -\det \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(第 2 列)} \leftarrow \text{(第 2 列)} \times (-1) \\ \text{(第 3 列)} \leftarrow \text{(第 3 列)} \times (-1) \\ \text{(第 4 列)} \leftarrow \text{(第 4 列)} \times (-1) \end{array} \right. \\
 &= -\det \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(第 2 列)} \leftarrow \text{(第 2 列)} - \text{(第 3 列)} \\
 &= -\det \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 2 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(第 3 列)} \leftarrow \text{(第 3 列)} - \text{(第 2 列)} \times 2 \\ \text{(第 4 列)} \leftarrow \text{(第 4 列)} - \text{(第 2 列)} \times 2 \end{array} \right. \\
 &= -\det \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(第 3 列)} \leftarrow \text{(第 3 列)} - \text{(第 4 列)} \\
 &= -\det \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 2 & -1 & 1 & \\ 2 & & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{(第 4 列)} \leftarrow \text{(第 4 列)} - \text{(第 3 列)} \times 4
 \end{aligned}$$

を得る . 一方 , 問題 4.8 で見たとおり , 一番最後の行列式の値は 7 である . したがって ,  $\det A = -7$  を得る .

(答)  $\det A = -7$ 

命題 4.10 の証明. (1)  $B_I''$  の転置行列は,  $A$  の転置行列  ${}^t A$  に対し, (第  $i$  列)  $\longleftrightarrow$  (第  $j$  列) という操作を行って得られる行列に等しい. したがって, 命題 4.9 によれば,  $\det B_I''$

$= -\det A$  を任意の正方向行列  $A$  に対して証明できれば、残りもうひとつの等式  $\det B''_{II} = -\det A$  もそれより従う。そこで、以下において等式  $\det B'_I = -\det A$  の証明を与えよう。そのために、行列  $B'_I$  の  $(p, q)$  成分を  $b_{pq}$  と書くことにする。また、 $\alpha$  を互換  $\begin{pmatrix} 1 \cdots i \cdots j \cdots n \\ 1 \cdots j \cdots i \cdots n \end{pmatrix}$  とする。すると、任意の  $\sigma \in S_n$  に対し、 $b_{p\sigma(p)} = a_{p(\alpha\sigma)(p)}$  (ただし、 $p = 1, \dots, n$ ) が成り立つ。一方、命題 4.2 によれば、 $\operatorname{sgn}(\alpha\sigma) = -\operatorname{sgn} \sigma$  が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} \det B'_I &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)} \\ &= - \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\alpha\sigma) \cdot a_{1(\alpha\sigma)(1)} \cdots a_{n(\alpha\sigma)(n)} \\ &= - \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn} \tau \cdot a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} \\ &= -\det A \end{aligned}$$

を得る。ただし、最後から 2 番目の等号は、各  $\sigma \in S_n$  に対し、 $\tau = \alpha\sigma \in S_n$  を対応させる写像が、 $S_n$  からそれ自身の上への全単射であることから従う。

(2) これが成り立つのは自明であるので、証明は割愛する。

(3) (1)の場合と同様、 $\det B'_{III} = \det A$  と  $\det B''_{III} = \det A$  が同等であることが、命題 4.9 により保証される。そこで、ここではそのうちの第 1 の等式を証明する。しかし、それには若干準備が必要である。いま、 $i$  (ただし、 $1 \leq i \leq n$ ) をひとつ取り固定する。また、 $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_i, \dots, \mathbf{c}_n$ 、および  $\mathbf{c}'_i$  を、 $n$  次元列ベクトルとする。このとき、

$$\det(\mathbf{c}_1 \cdots \mathbf{c}_i + \mathbf{c}'_i \cdots \mathbf{c}_n) = \det(\mathbf{c}_1 \cdots \mathbf{c}_i \cdots \mathbf{c}_n) + \det(\mathbf{c}_1 \cdots \mathbf{c}'_i \cdots \mathbf{c}_n) \quad (4.13)$$

が成り立つ。ただしここで、たとえば  $(\mathbf{c}_1 \cdots \mathbf{c}_i \cdots \mathbf{c}_n)$  は、列ベクトル  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_i, \dots, \mathbf{c}_n$  を並べて得られる行列を表す約束であったことを思い起こそう。(4.13) は、あるいは、次のように述べることも可能である。すなわち、 $n$  次正方形行列  $C$  に対し、その第  $i$  列に  $n$  次元列ベクトル  $\mathbf{c}'_i$  を加えて得られる行列の行列式は、もとの行列  $C$  の行列式と、 $C$  の第  $i$  列を  $\mathbf{c}'_i$  で置き換えて得られる行列の行列式の和に等しい。この等式 (4.13) を証明するために、各列ベクトル  $\mathbf{c}_q$  の第  $p$  成分を  $c_{pq}$  で、また列ベクトル  $\mathbf{c}'_i$  の第  $p$  成分を  $c'_{pi}$  で表そう。すると、(4.12) より、

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{c}_1 \cdots \mathbf{c}_i + \mathbf{c}'_i \cdots \mathbf{c}_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot c_{\sigma(1)1} \cdots (c_{\sigma(i)i} + c'_{\sigma(i)i}) \cdots c_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot c_{\sigma(1)1} \cdots c_{\sigma(i)i} \cdots c_{\sigma(n)n} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot c_{\sigma(1)1} \cdots c'_{\sigma(i)i} \cdots c_{\sigma(n)n} \\ &= \det(\mathbf{c}_1 \cdots \mathbf{c}_i \cdots \mathbf{c}_n) + \det(\mathbf{c}_1 \cdots \mathbf{c}'_i \cdots \mathbf{c}_n). \end{aligned}$$



これで, (4.13) が証明された.

さて, これで等式  $\det B'_{III} = \det A$  を証明する準備が出来た. いま,  $A$  の第  $q$  列 (ただし,  $q = 1, \dots, n$ ) を  $\mathbf{a}_q$  と記す. すると,  $A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n)$ ,  $B'_{III} = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i + \kappa \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n)$  となる. したがって, (4.13), および (2) より,

$$\begin{aligned} \det B'_{III} &= \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i + \kappa \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n) \\ &= \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n) + \kappa \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n) \end{aligned}$$

を得る. この最後の等号の右辺第 1 項は,  $\det A$  に等しい. 一方, 第 2 項に現れる行列  $C = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n)$  であるが, その第  $i$  列, および第  $j$  列はともに  $\mathbf{a}_j$  である. したがって, その第  $i$  列と第  $j$  列を入れ替えて得られる行列  $C'$  は  $C$  自身に他ならない:  $C' = C$ . ところが, 一方 (1) によれば,  $\det C' = -\det C$ . これより,  $\det C = -\det C$ , すなわち  $\det C = 0$  を得る. 以上から,  $\det B'_{III} = \det A$  が結論される. □

次の話題は, いま証明を終えた命題 4.10 の新たな応用についてです.

**命題 4.12.**   
 正方行列  $A$  に対し, それが正則, すなわち逆行列を持つための必要十分条件は,  $\det A \neq 0$  が成り立つことである.

この命題は重要な意味を持ちます. その第一の理由は, 正方行列の正則性を, 行列式という一種の実数値不変量のみを用いて判定できることです. さらに, もうひとつ忘れてはならないのは, それを介して行列式の意味を解釈できる点にあります. この節の最初で行列式の定義を与えましたが, それは極めて形式的なものであり, 行列式の値は一体何を意味しているのか, あるいはそもそもなぜそのようなものを考える必要があるのか, といった極めて基本的な疑問に対し, 定義自身は何も答えてくれません. しかし, この命題 4.12 によれば, 少なくとも, 行列式の値がゼロであるか否かは, 行列の正則性に直接関係していることが保証されます.

命題 4.12 の証明.  $A$  を  $n$  次正方行列とする. それに対し, 行列の列に関する基本変形を適用し, 下階段行列  $B$  に変形する. 命題 4.10 によれば, 行列式の値がゼロであるか否かは, 行列の基本変形に関し不変である. したがって,

$$\det A \neq 0 \iff \det B \neq 0 \tag{4.14}$$

を得る．もちろん行列  $B$  もまた正方行列であるから， $B$  は下三角行列，すなわち，

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ * & \lambda_2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ * & \cdots & * & \lambda_n \end{pmatrix}$$

といった形をしている．よって，問題 4.8 で見たように， $\det B = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$  が成り立つ．ところで， $B$  はそもそも下階段行列であったから，ある番号  $i$  に対し  $\lambda_i = 0$  であるならば，すべての  $p > i$  に対しても  $\lambda_p = 0$  でなければならない．よって， $\det B = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = 0$  であるためには， $\lambda_n = 0$  が成り立つことが必要である．あるいは，いま述べたことの変換をとれば，

$$\lambda_n \neq 0 \quad \implies \quad \det B \neq 0 \quad (4.15)$$

が従う．さらに，(列) 階数の定義を思い起こすならば，

$$\text{rank } A = n \quad \implies \quad \lambda_n \neq 0 \quad (4.16)$$

でなければならないことが判る．一方， $\det B = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \neq 0$  と仮定するならば，再び(列)階数の定義より， $\text{rank } A = n$  が従う：

$$\det B \neq 0 \quad \implies \quad \text{rank } A = n. \quad (4.17)$$

(4.15) - (4.17)から，

$$\det B \neq 0 \quad \iff \quad \text{rank } A = n$$

を得る．これと，(4.14) とから，

$$\det A \neq 0 \quad \iff \quad \text{rank } A = n$$

が従う．ところが，命題 3.14 によれば， $\text{rank } A = n$  であるための必要十分条件は， $A$  が正則であることである．以上で，命題 4.12 の証明が完了した．  $\square$

この節の締め括りとして，行列式の持つ大事な性質をもうひとつだけ述べることにします．

**命題 4.13.**   
 $A, B$  を  $n$  次正方行列としたとき，

$$\det(BA) = \det B \cdot \det A$$

が成り立つ．とくに正則行列  $A$  は，

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

を必ず満たす．

$\square$

この命題の証明にはいくつか準備が必要です.  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  を  $n$  次元列ベクトルとしたとき, それらから作られる  $n$  次正方行列  $(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$  の行列式  $\det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$  を  $D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  と書き,  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$  の関数と見なしましょう. すると, 命題 4.10 の (1), (2), および (4.13) から,  $D$  が次に挙げるような性質を有することが導かれます.

$$D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) = -D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) \quad (i \neq j), \quad (4.18)$$

$$D(\mathbf{a}_1, \dots, \kappa \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) = \kappa \cdot D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n), \quad (4.19)$$

$$D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i + \mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n) = D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) + D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n). \quad (4.20)$$

性質 (4.18) は,  $D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n)$  の値は, その変数であるところの  $\mathbf{a}_i$  と  $\mathbf{a}_j$  (ただし,  $i \neq j$ ) を入れ替えると, ちょうど符号だけが変化することを述べています. 一方, (4.19) および (4.20) は,  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n$  のうち  $\mathbf{a}_i$  を除いたものを固定し,  $D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n)$  を  $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$  のみの関数と考えたとき, それが線形であることを主張しています. 命題 4.13 の証明を行うための準備として,  $D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$  に対する上記 3 つの性質 (4.18) – (4.20) と全く同一の性質を有する関数を, 決定する必要があります.

補題 4.14.  $D$  を,  $n$  個の  $n$  次元列ベクトル  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$  に対し, 実数  $D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  を対応させる関数とする. もしこの  $D$  が条件 (4.18) – (4.20) を満たすならば,

$$D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = D(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \cdot \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n) \quad (4.21)$$

がすべての  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$  に対して成立する. ただし,  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  は  $\mathbb{R}^n$  の標準基底である.

方程式 (4.21) によれば, 条件 (4.18) – (4.20) を満たす関数  $D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  は, 定数倍を除いて行列式  $\det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$  に等しい, すなわち, かような関数  $D$  は, 行列式の定数倍の形をしていることとなります. しかも, その定数も  $D(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  に一致することまで, (4.21) は主張しています.

補題 4.14 の証明.  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$  が任意に与えられたとしよう. このとき, 各  $p, q = 1, \dots, n$  に対し, 列ベクトル  $\mathbf{a}_q$  の第  $p$  成分を  $a_{qp}$  と書くことにする. すると,  $\mathbf{a}_q = \sum_{p=1}^n a_{qp} \mathbf{e}_p$  が成り立つから, (4.19), および (4.20) とより,

$$D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = D(\sum_{p_1=1}^n a_{1p_1} \mathbf{e}_{p_1}, \sum_{p_2=1}^n a_{2p_2} \mathbf{e}_{p_2}, \dots, \sum_{p_n=1}^n a_{np_n} \mathbf{e}_{p_n})$$

$$= \sum_{p_1, p_2, \dots, p_n=1}^n a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} D(\mathbf{e}_{p_1}, \mathbf{e}_{p_2}, \dots, \mathbf{e}_{p_n})$$

を得る．一方，(4.18) より， $\mathbf{e}_{p_1}, \mathbf{e}_{p_2}, \dots, \mathbf{e}_{p_n}$  のうち少なくともふたつが一致するならば， $D(\mathbf{e}_{p_1}, \mathbf{e}_{p_2}, \dots, \mathbf{e}_{p_n})$  が値ゼロを取らねばならないことが，命題 4.10 (3) の証明におけるのと同様にして示される．したがって，上式における第 2 の等号の右辺に現れる総和は， $p_1, p_2, \dots, p_n$  が置換を定義する場合のみに制限できる．すなわち，

$$\begin{aligned} & \sum_{p_1, p_2, \dots, p_n=1}^n a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} D(\mathbf{e}_{p_1}, \mathbf{e}_{p_2}, \dots, \mathbf{e}_{p_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} D(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \mathbf{e}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}). \end{aligned}$$

ここで，等号の右辺の総和の各項に現れる  $\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \mathbf{e}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}$  を， $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  の順に並べ替えよう．すると，(4.18)，および系 4.5 より，

$$D(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \mathbf{e}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$$

を得る．以上の等式から，(4.21) が成り立つことが結論される．  $\square$

命題 4.13 の証明.  $A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$  とおく．すると， $BA = (Ba_1 \cdots Ba_n)$ ， $\det(BA) = \det(Ba_1 \cdots Ba_n)$  を得る．この最後の等式の右辺を  $D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  とおく： $D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(Ba_1 \cdots Ba_n)$ ．このとき，この関数  $D$  が条件 (4.18) – (4.20) すべてを満たすことが容易に検証される．したがって，補題 4.14 より， $\det(BA) = D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = D(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \cdot \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$  を得る．もちろん， $\det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n) = \det A$  である．一方， $D$  の定義によれば， $D(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \det(Be_1 \cdots Be_n) = \det B$  が成り立つ．これで，命題 4.13 が証明できた．  $\square$

## C 余因子展開

この節では行列式を計算する新たな方法を勉強したいと思います．さっそく話を始めましょう．いま， $A$  を  $n$  次正方行列とします．この行列から第  $i$  行，および第  $j$  列を取り除いて得られる  $(n-1)$  次正方行列を  $\hat{A}_{ij}$  と書き，もとの行列  $A$  の  $(i, j)$ -小行列と呼ぶことにしましょう．ただし， $i, j = 1, \dots, n$  であることは言うまでもありません．このとき，行列  $A$  の  $(i, j)$ -余因子  $\Delta_{ij}$  が，

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \hat{A}_{ij}$$

により定義されます．たとえば，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

に対し,

$$\hat{A}_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 12 & 14 & 5 \\ 10 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 12 & 14 & 5 \\ 10 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 220,$$

と言った具合です. そして, 以下の定理に述べるように, この余因子を使って行列式の計算を行うことができます.

定理 4.15.

$A$  を  $n$  次正方行列とする. このとき, 各  $i, j = 1, \dots, n$  に対し,

$$\det A = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \dots + a_{in}\Delta_{in}, \tag{4.22}$$

および

$$\det A = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \dots + a_{nj}\Delta_{nj} \tag{4.23}$$

が成り立つ.

(4.22), (4.23) の右辺はそれぞれ, 行列  $A$  の行列式の第  $i$  行に関する余因子展開, 第  $j$  列に関する余因子展開と呼ばれます.

定理 4.15 の証明. まず, 命題 4.9 を用いることにより, 列に関する余因子展開 (4.23) は, 行に関する余因子展開 (4.22) に帰着されることに注意しよう. さらに, 命題 4.10 を適当に用いれば, (4.22) はとくにそこにおいて  $i = 1$  とした場合に還元される. そこで, 以下において (4.22) をとくに  $i = 1$  の場合に証明する.

各  $j = 1, \dots, n$  に対し,

$$T_j = \{\sigma \in S_n : \sigma(1) = j\}$$

と置こう. 明らかに,  $S_n = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n$ , かつ  $T_j \cap T_k = \phi$  ( $j \neq k$ ) が成り立つ. すなわち,  $n$  次の置換全体  $S_n$  は, その部分集合  $T_1, T_2, \dots, T_n$  に分割可能なわけである. よって, 行列式の定義とから,

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in T_1} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{11} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in T_2} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{12} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &\quad + \cdots \cdots + \sum_{\sigma \in T_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1n} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

を得る．したがって，

$$\Delta_{1j} = \sum_{\sigma \in T_j} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (4.24)$$

を示せばよいわけである．

$j = 1, \dots, n$  を任意に取り固定しよう． $A$  の  $(1, j)$  小行列  $\hat{A}_{1j}$  の  $(p, q)$  成分を  $b_{pq}$  とすれば，余因子  $\Delta_{1j}$  は，

$$\Delta_{1j} = (-1)^{1+j} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \tau \cdot b_{1\tau(1)} \cdots b_{n-1\tau(n-1)}$$

により定義されていた．一方，小行列  $\hat{A}_{ij}$  の定義によれば，

$$b_{pq} = \begin{cases} a_{p+1q} & (q < j \text{ の場合}) \\ a_{p+1q+1} & (q \geq j \text{ の場合}) \end{cases}$$

でなければならない．したがって，各  $\tau \in S_{n-1}$  に対し  $\check{\tau} \in S_n$  を， $\check{\tau}(1) = j$ ，および

$$\check{\tau}(i) = \begin{cases} \tau(i-1) & (\tau(i-1) < j \text{ の場合}) \\ \tau(i-1) + 1 & (\tau(i-1) \geq j \text{ の場合}) \end{cases}$$

( $i = 2, \dots, n$ ) により定義すれば，

$$\Delta_{1j} = (-1)^{1+j} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \tau \cdot a_{2\check{\tau}(2)} \cdots a_{n\check{\tau}(n)} \quad (4.25)$$

と書くことが可能である．さらに  $\check{\tau}$  の符号  $\operatorname{sgn} \check{\tau}$  を  $\tau$  の符号  $\operatorname{sgn} \tau$  に書き直したい．そのために，各  $\tau \in S_{n-1}$  に対し  $\bar{\tau} \in S_n$  を，

$$\bar{\tau}(i) = \begin{cases} n & (i = 1) \\ \tau(i-1) & (2 \leq i \leq n) \end{cases}$$

で定義する．さらに，

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & \cdots & j-1 & j+1 & j+2 & \cdots & n & j \end{pmatrix} \in S_n$$

を取る．すると， $\check{\tau} = \alpha \bar{\tau}$  と書けることに注意しよう．しかも， $\operatorname{sgn} \bar{\tau} = (-1)^{n-1} \operatorname{sgn} \tau$ ，かつ  $\operatorname{sgn} \alpha = (-1)^{n-j}$  であるのは明らかであるから，命題 4.2 から  $\operatorname{sgn} \check{\tau} = (-1)^{1+j} \operatorname{sgn} \tau$  であることが従う．よって，(4.25) を

$$\Delta_{1j} = \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \check{\tau} \cdot a_{2\check{\tau}(2)} \cdots a_{n\check{\tau}(n)}$$

と書き直すことが可能である．そして，最後に各  $\tau \in S_{n-1}$  に対し  $\check{\tau} \in S_n$  を対応させる写像が， $S_{n-1}$  から  $T_j$  の上への全単射であることより，最後の等式の右辺は (4.24) の右辺に等しいことが分かる．これで(4.24) が結論された．  $\square$

余因子展開が行列式の計算に有効であることは言うまでもありません．それを確かめるために，まず前節で解いた問題 4.11 を，今度は余因子展開を利用して解いてみることにしましょう．

問題 4.11 の別解．

$$\begin{aligned}
 & \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= -\det \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} && \text{(前節で与えた解答と同様の仕方)} \\
 &= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} && \text{(第1行に関する余因子展開により)} \\
 &= -3 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \\
 &\quad + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 2 \\
 &= -7
 \end{aligned}$$

今度はもう少し進んだ問題を出します．

問題 4.16. \_\_\_\_\_

$n$  次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に対し，その行列式を計算せよ．ただし， $n \geq 2$  とする．

解答．次数  $n$  を強調するために，問題の  $n$  次行列を  $A_n$  で表そう．すると，

$$\det A_n = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(第1行に関する余因子展開)}$$

$$\begin{aligned}
&= -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} && \text{(第2列)} \leftarrow \text{(第2列)} - \text{(第1列)} \\
&= -\det A_{n-2} && \text{(第1行に関する余因子展開)}
\end{aligned}$$

が成り立つ。一方,

$$\det A_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1, \quad \det A_3 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

であることは明らかである。したがって,

$$\text{(答)} \quad \det A = \begin{cases} 1 & (n = 4m) \\ -1 & (n = 4m + 2) \\ 0 & (n = 4m + 1, 4m + 3) \end{cases}$$

いま解いた問題からも分かるとおり, 余因子展開は行列の大きさに関する帰納法により行列式を計算するときにとくに有効であることを最後に注意しておきましょう。