傾変異とクラスター傾加群

1　導入
2　傾変異
3　応用

名古屋大学多元数理科学研究科
伊山　修

1　導入

- k：体
- Λ：有限次元 k-多元環
- $\mathrm{mod}\,\Lambda$：有限生成（右）Λ-加群の圏

$X \in \mathrm{mod}\,\Lambda$：直既約

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $X \simeq X_1 \oplus X_2$ ならば $X_1 = 0$ または $X_2 = 0$

(Krull-Schmidt)
任意の $X \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ は直既約加群の有限直和として一意的に表される

問 X : 直既約 Λ-加群
圏 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ の中に X に最も近い加群は存在するか？

- 「近さ」は射で考える
- 右（X への射）と左（X からの射）の２種類が存在

$f : Y \to X$ が $g : Z \to X$ よりも X に「近い」

$$\Longleftrightarrow \text{可換図式} \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \uparrow & & \| \\ Z & \xrightarrow{g} & X \end{array} \quad \text{が存在}$$

- 恒等射 $1_X : X \longrightarrow X$ が X に最も近い！
- 任意の分裂全射 $p : Y \to X$ も X に最も近い！

非自明なものの中で、X に最も近い射を考える

定義 $f : Y \to X$ が X のsink map

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

- f は分裂全射ではない
- $g : Z \to X$ が分裂全射でなければ

  可換図式
  $$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \uparrow & & \| \\ Z & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$
  が存在
- f は右最小（ムダが無い！）

双対的に X のsource map も定める

問 X の sink map と source map はいつ存在するか？

例 (1) X : 直既約射影的 Λ-加群

$\Longrightarrow$ 自然な単射 $\operatorname{rad} X \to X$ は sink map

(2) X : 直既約入射的 Λ-加群

$\Longrightarrow$ 自然な全射 $X \to X/\operatorname{soc} X$ は source map

定理 $\forall X$: 射影的でない直既約 Λ-加群

$\exists$ 分裂していない短完全列 $0 \longrightarrow Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X \longrightarrow 0$

- f は sink map
- g は source map
- Z は 入射的でない直既約 Λ-加群

これを概分裂完全列と呼ぶ. 圏構造の基本単位を与える

系 任意の直既約 Λ-加群は sink map と source map を持つ

圏 $\operatorname{mod}\Lambda$ の局所構造はクイバーで表示可能

Λ が有限表現型（$\overset{\text{def}}{\iff}$ 直既約 Λ-加群の同型類が有限個）のとき

- $M := \displaystyle\bigoplus_{X:\text{直既約 }\Lambda\text{-加群}} X$
- $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(M)$

$\boxed{\text{圏同値 } P := \mathrm{Hom}_\Lambda(M, -) : \operatorname{mod}\Lambda \xrightarrow{\sim} \operatorname{proj}\Gamma \text{ が存在}}$

$\forall X$: 非射影的な直既約 Λ-加群

$$P_Y \xrightarrow{P_f} P_X \longrightarrow P_X/\operatorname{rad} P_X \longrightarrow 0 : \text{最小射影分解}$$

$$\Longrightarrow 0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow Y \xrightarrow{f} X \longrightarrow 0 : \text{概分裂完全列}$$

$\boxed{\Lambda \text{ の概分裂完全列} \longleftrightarrow \text{単純 } \Gamma\text{-加群の最小射影分解}}$

(Auslander 対応)

(1) Λ : 有限表現型多元環, $\Gamma := \operatorname{End}_\Lambda(\bigoplus_{X:\text{直既約 }\Lambda\text{-加群}} X)$

$\Longrightarrow$ Γ は Auslander 多元環 ($\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\operatorname{gl.dim}\Gamma \leq 2 \leq \operatorname{dom.dim}\Gamma$)

(2) 任意の Auslander 多元環は, (1) により得られる

加群圏 $\operatorname{mod}\Lambda$ の構造論 = Auslander 多元環 Γ の構造論

一般のとき

Auslander多元環の代わりに関手圏を用いる

関手圏 $\mathrm{Mod}(\mathrm{mod}\,\Lambda)$

- 対象は加法的反変関手 $F : \mathrm{mod}\,\Lambda \to$（アーベル群の圏）
- 射は自然変換

$\mathrm{Mod}(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ はアーベル圏

米田埋め込み $P : \mathrm{mod}\,\Lambda \to \mathrm{Mod}(\mathrm{mod}\,\Lambda)$, $P_X := \mathrm{Hom}_\Lambda(-, X)$

$F \in \mathrm{Mod}(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ が連接的

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ∃ 完全列 $P_Y \xrightarrow{P_f} P_X \to F \to 0$

$\boxed{\textbf{命題}\ \ \mathrm{Mod}(\mathrm{mod}\,\Lambda)\text{ の単純関手は連接的}}$

$\boxed{\Lambda\text{ の概分裂完全列} \longleftrightarrow \text{単純関手の最小射影分解}}$

以上の話は, 一般に「良い双対性」を持つ加群圏で成立する

例

(1) 大域次元が有限の有限次元多元環 Λ 上の有界導来圏 $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}\Lambda)$

(2) 完備局所 Cohen-Macaulay 孤立特異点 Λ 上の CM 加群の圏 $\mathrm{CM}(\Lambda)$

$M \in \operatorname{mod}\Lambda$

add M $:= \{X \in \operatorname{mod}\Lambda \mid X$ は M^{ℓ} の直和因子$(\exists \ell)\}$

M : クラスター傾加群（極大1-直交加群）

$$\overset{\text{def}}{\iff} \operatorname{add} M = \{X \in \operatorname{mod}\Lambda \mid \operatorname{Ext}^1_\Lambda(M, X) = 0\}$$
$$= \{X \in \operatorname{mod}\Lambda \mid \operatorname{Ext}^1_\Lambda(X, M) = 0\}$$

（2-Auslander対応）

(1) $M \in \operatorname{mod}\Lambda$: クラスター傾加群, $\Gamma = \operatorname{End}_\Lambda(M)$

$\Longrightarrow \Gamma$ は 2-Auslander多元環（$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\operatorname{gl.dim}\Gamma \leq 3 \leq \operatorname{dom.dim}\Gamma$）

(2) 任意の 2-Auslander多元環は, (1) により得られる

概分裂完全列の理論がクラスター傾加群に対しても展開される（高次Auslander-Reiten理論）

2　傾変異

定義　[Brenner-Butler]

T: 傾 Λ-加群 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} \bullet\ \text{proj.dim}\, T \leq 1 \\ \bullet\ \text{Ext}^1_\Lambda(T,T) = 0 \\ \bullet\ \exists \text{完全列}\quad 0 \to \Lambda \to T_0 \to T_1 \to 0 \quad (T_i \in \text{add}\, T) \end{cases}$

$\Gamma := \text{End}_\Lambda(T)$

- T は 傾 Γ^{op}-加群
- $\exists$ 導来圏同値 $\mathbf{R}\,\text{Hom}_\Lambda(T,-) : \mathcal{D}^{\text{b}}(\text{mod}\,\Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{\text{b}}(\text{mod}\,\Gamma)$
- $\exists$ Grothendieck群の同型 $K_0(\Lambda) \xrightarrow{\sim} K_0(\Gamma)$

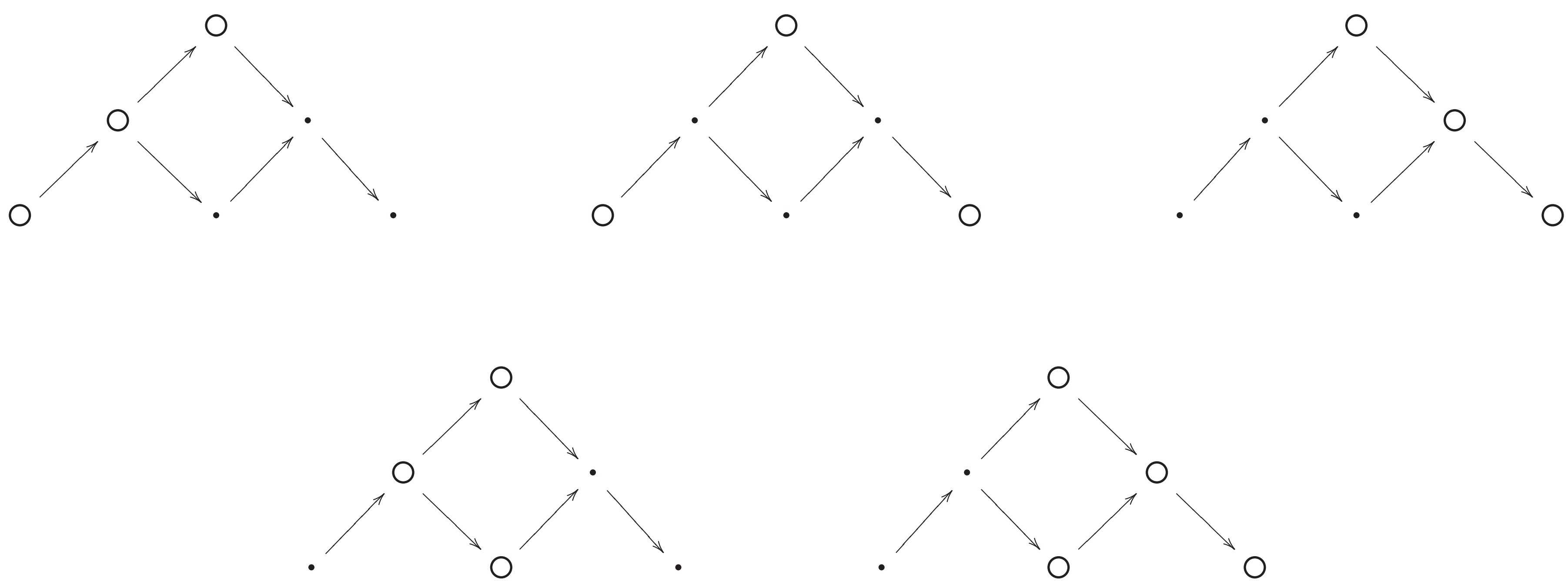
$T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$（$T_i$：直既約）が基本的 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $T_i \neq T_j\ \forall i \neq j$

- T：基本的傾 Λ-加群 $\Longrightarrow n =$（単純 Λ-加群の個数）

例　$\Lambda = \begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & (kkk) \arrow[dr] & & \\
 & (0kk) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (kk0) \arrow[dr] & \\
(00k) \arrow[ur] & & (0k0) \arrow[ur] & & (k00)
\end{tikzcd}$$

基本的傾 Λ-加群は以下の 5 個



T, U: 傾 Λ-加群

定義 [Riedtmann-Schofield, Happel-Unger]
$T \geq U \overset{\text{def}}{\iff} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, U) = 0$

問　これは実際に半順序になるか？

$\mathcal{D} := \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\,\Lambda)$

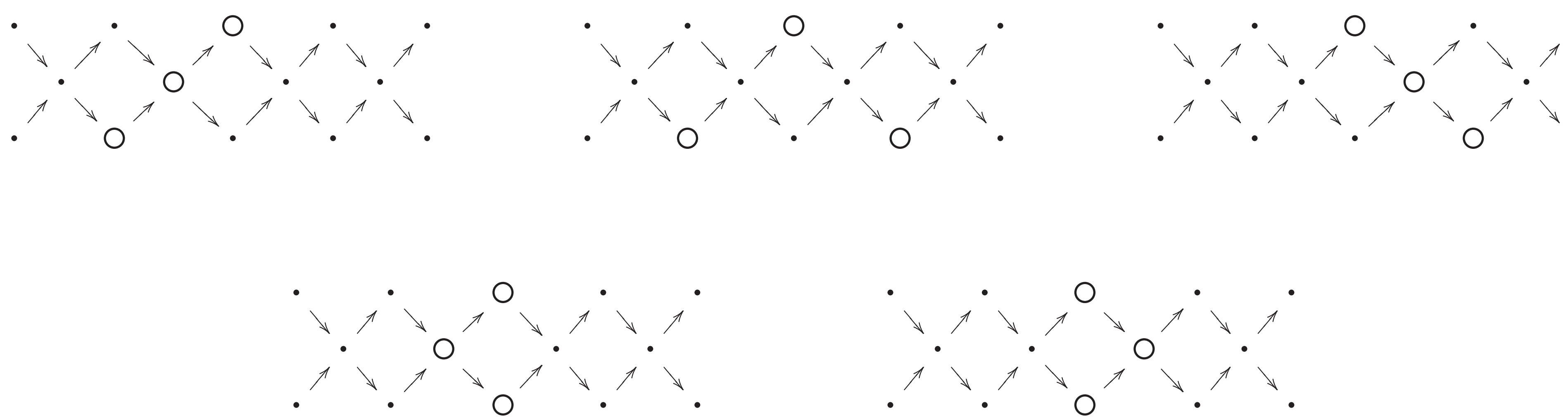
$\mathcal{D}_T^{\leq 0} := \{X \in \mathcal{D} \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T, X[i]) = 0\ \forall i > 0\}$

$\mathcal{D}_T^{\geq 0} := \{X \in \mathcal{D} \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T, X[i]) = 0\ \forall i < 0\}$

$(\mathcal{D}_T^{\leq 0}, \mathcal{D}_T^{\geq 0})$ は $\mathcal{D}$ の t-構造

$$\begin{cases} \bullet\ \mathcal{D}_T^{\leq 0}[1] \subseteq \mathcal{D}_T^{\leq 0}, \quad \mathcal{D}_T^{\geq 0}[1] \supseteq \mathcal{D}_T^{\geq 0} \\ \bullet\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_T^{\leq 0}, \mathcal{D}_T^{\geq 0}[-1]) = 0 \\ \bullet\ \forall X \in \mathcal{D},\ \exists \text{ 三角 } Y \to X \to Z \to Y[1] \ \ (Y \in \mathcal{D}_T^{\leq 0},\ Z \in \mathcal{D}_T^{\geq 0}[-1]) \end{cases}$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
(0k0)[-1] \arrow[dr] & & (k00)[-1] \arrow[dr] & & (kkk) \arrow[dr] & & (00k)[1] \arrow[dr] & & (0k0)[1] \\
\cdots & (kk0) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (0kk) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (kk0) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (0kk)[1] \arrow[ur] \arrow[dr] & \cdots \\
(kkk)[-1] \arrow[ur] & & (00k) \arrow[ur] & & (0k0) \arrow[ur] & & (k00) \arrow[ur] & & (kkk)[1]
\end{tikzcd}
$$



$$T \geq U \Longleftrightarrow \mathcal{D}_T^{\leq 0} \supseteq \mathcal{D}_U^{\leq 0} \Longleftrightarrow \mathcal{D}_T^{\geq 0} \subseteq \mathcal{D}_U^{\geq 0}$$

命題 $\leq$ は, 基本的傾 Λ-加群の同型類の集合上の, 半順序を与える

定義 Λ のHasse quiver

- 頂点は基本的傾 Λ-加群の同型類
- $T \to U \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \bullet\ T > U \\ \bullet\ T > V > U \quad \text{となる } V \text{ は存在しない} \end{cases}$

問 Hasse quiver における隣接関係は何か？

$T = U \oplus X$（X： 直既約）

$U' \xrightarrow{f} X$ ： X の最小右 U-近似

$$\begin{cases} \bullet\ U' \in \operatorname{add} U \\ \bullet\ \operatorname{Hom}_\Lambda(U, U') \xrightarrow{f} \operatorname{Hom}_\Lambda(U, X) \longrightarrow 0 : \text{exact} \\ \bullet\ f \text{ は右最小} \end{cases}$$

$X \xrightarrow{g} U''$ ： X の最小左 U-近似

命題 (1) f が全射

$\Longrightarrow$ $U \oplus \operatorname{Ker} f$ も傾 Λ-加群（T の右変異）

(2) g が単射かつ $\operatorname{proj.dim} \operatorname{Cok} g \leq 1$

$\Longrightarrow$ $U \oplus \operatorname{Cok} g$ も傾 Λ-加群（T の左変異）

(3) (1) と (2) は同時には成立しない

変異 := 右または左変異

T の変異は高々 n 個しか存在しない

定理 [Riedtmann-Schofield, Happel-Unger]

(1) $T \to U \iff T$ は U の右変異 $\iff U$ は T の左変異

(2) T は U の変異 $\iff T$ と U の直既約直和因子は, 一つを除いて一致

次の性質を後で用いる

命題 $T > U$

$\Longrightarrow \exists T = T_0 > T_1 > T_2 > \cdots > U$

- T_{i+1} は T_i の左変異
- （$\exists m, T_m = U$）または（列は無限）

応用として次が得られる

系 基本的傾 Λ-加群が有限個

$\Longrightarrow$ Λ の Hasse quiver は連結

3　応用　[Burban, I., Keller, Reiten]

- k : 標数 0 の代数的閉体
- $k[[x,y]]$: 2変数巾級数環
- $\Lambda = k[[x,y]]/(f) \quad (0 \neq f \in (x,y))$: 1次元超曲面
- $\mathrm{CM}(\Lambda) = \{X \in \mathrm{mod}\,\Lambda \mid \mathrm{Hom}_\Lambda(k,X) = 0\}$
- Λ は孤立特異点と仮定

$f = f_1 f_2 \cdots f_n \quad (f_i$: 既約) とおくとき $(f_i) \neq (f_j)$ $(\forall i \neq j)$

命題　$\mathrm{CM}(\Lambda)$ は 2-Calabi-Yau
$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,Y) \simeq D\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Y,X)$ $(X, Y \in \mathrm{CM}(\Lambda))$

$M \in \mathrm{CM}(\Lambda)$ がクラスター傾加群
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{add}\,M = \{X \in \mathrm{CM}(\Lambda) \mid \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,X) = 0\}$

問題　$\mathrm{CM}(\Lambda)$ のクラスター傾加群を決定せよ

定理 Λ がクラスター傾加群をもつ

$\iff f_i \notin (x,y)^2 \ (1 \leq i \leq n)$

このとき $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} k[[x,y]]/(f_1 \cdots f_i)$ はクラスター傾加群

<u>以下 $f_i \notin (x,y)^2$ を仮定</u>

$\mathfrak{S}_n$: n 次対称群

$w \in \mathfrak{S}_n$ ごとに Λ のクラスター傾加群

$M_w := \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} k[[x,y]]/(f_{w(1)} \cdots f_{w(i)})$ をうる

問 他に存在するか？

命題　$M, N \in \mathrm{CM}(\Lambda)$：クラスター傾加群
$\Longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N)$ は傾 $\mathrm{End}_\Lambda(M)$-加群

$\mathrm{CM}(\mathrm{End}_\Lambda(M_w))$：$\Lambda$ 加群としてCMであるような $\mathrm{End}_\Lambda(M_w)$-加群の圏

$$
\begin{array}{rccc}
\mathrm{Hom}_\Lambda(M_w,-): & \mathrm{CM}(\Lambda) & \to & \mathrm{CM}(\mathrm{End}_\Lambda(M_w)) \text{：忠実充満関手} \\
& \text{クラスター} & \mapsto & \text{傾加群} \\
& \text{傾加群} & &
\end{array}
$$

定理 $\mathrm{End}_\Lambda(M_w)$ は丁度 $n!$ 個の基本的CM傾加群 $\mathrm{Hom}_\Lambda(M_w, M_{w'})$ $(w' \in \mathfrak{S}_n)$ をもつ

(i) 傾 $\mathrm{End}_\Lambda(M_w)$-加群 $\mathrm{Hom}_\Lambda(M_w, M_{w'})$ $(w' \in \mathfrak{S}_n)$ は
丁度 $n-1$ 個のCMであるような変異
$\mathrm{Hom}_\Lambda(M_w, M_{w's_i})$ $(1 \leq i < n,\, s_i = (i\ i+1))$ をもつ

(ii) CM傾 $\mathrm{End}_\Lambda(M_w)$-加群 U に対し, CM傾加群の変異の列
$\mathrm{End}_\Lambda(M_w) = T_0 > T_1 > T_2 > \cdots > U$ が存在

(iii) (i) より $T_i = \mathrm{Hom}_\Lambda(M_w, M_{w_i})$ となる $w_i \in \mathfrak{S}_n$ が存在

(iv) $\mathfrak{S}_n$ は有限群なので $U = T_m$ となる m が存在
特に $U = \mathrm{Hom}_\Lambda(M_w, M_{w_m})$ をうる

系 Λ は丁度 $n!$ 個の基本的クラスター傾加群 M_w $(w \in \mathfrak{S}_n)$ をもつ