多元環と三角圏

1. Auslander-Reiten 理論
2. 傾斜理論
3. 三角圏の構成

名古屋大学多元数理科学研究科
伊山　修

1 Auslander-Reiten 理論

- k : 代数的閉体
  Λ : 有限次元 k-多元環
  J_Λ : Λ の Jacobson 根基
- Λ が**基本的** ($\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \Lambda/J_\Lambda$ が体の直和)
  と仮定.
- $1 = e_1 + \cdots + e_n$: 原始直交冪等元
  $e_i^2 = e_i$,
  $e_i e_j = 0\ (i \neq j)$,
  これ以上細分できない.

環のグラフ表示 (Gabriel quiver)

- 頂点は, $1, 2, \cdots, n$.
- $d_{ij} := \dim_k(e_i(J_\Lambda/J_\Lambda^2)e_j)$.
  i から j に, d_{ij} 本の矢印を描く.

例 $\Lambda = \begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$

$$J_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \supset J_\Lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_\Lambda / J_\Lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & (i+1=j) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$\overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{2}{\bullet} \longrightarrow \overset{3}{\bullet}$$

$\mathrm{mod}\,\Lambda$: 有限生成(左) Λ-加群の圏

圏のグラフ表示(AR quiver)

頂点は, 直既約 Λ-加群の同型類.
圏 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ の**Jacobson 根基** $J = J_{\mathrm{mod}\,\Lambda}$

- 各 $X, Y \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ に対して, $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y)$ の部分加群 $J(X, Y)$ が与えられていて,
- $\mathrm{Hom}_\Lambda(W, X) \cdot J(X, Y) \cdot \mathrm{Hom}_\Lambda(Y, Z) \subset J(W, Z)$
- $J(X, X) = J_{\mathrm{End}_\Lambda(X)}$.

$d_{XY} := \dim_k J(X, Y)/J^2(X, Y)$
X から Y に, d_{XY} 本の矢印を描く.

問題 AR quiver は局所有限か？

答 "Yes" $\longrightarrow$ AR 理論で説明される.

- $D := \mathrm{Hom}_k(-, k) : \mathrm{mod}\,\Lambda \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathrm{mod}\,\Lambda^{\mathrm{op}}$
- $(-)^* := \mathrm{Hom}_\Lambda(-, \Lambda) : \mathrm{mod}\,\Lambda \longleftrightarrow \mathrm{mod}\,\Lambda^{\mathrm{op}}$
- $X \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ の射影分解
  $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \to X \to 0$ をとり, 完全列
  $P_0^* \xrightarrow{f^*} P_1^* \to \mathrm{tr}\,X \to 0$ により
  transpose $\mathrm{tr}\,X \in \mathrm{mod}\,\Lambda^{\mathrm{op}}$ を定める.
- tr はそのままでは関手ではないので,
  安定圏 $\underline{\mathrm{mod}}\ \Lambda$ を考える.
  対象は $\mathrm{mod}\,\Lambda$ と同じ. 射は

$$\begin{aligned}&\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(X, Y)\\ :=\ &\mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y)/\{\text{射影加群を通過する射}\}\end{aligned}$$

- 双対 $\mathrm{tr} : \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda \leftrightarrow \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda^{\mathrm{op}}$ を得る. [Auslander-Bridger, '69]
- 同様に入射加群を通過する射を 0 とみなすことにより, **余安定圏** $\overline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ を定める.
- 次の圏同値(**AR translation**)を得る.

$$\tau : \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda \xrightarrow{\mathrm{tr}} \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda^{\mathrm{op}} \xrightarrow{D} \overline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$$

定理(AR双対) 次の関手的同型が存在.

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\Lambda}(X, Y) \simeq D\,\mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(Y, \tau X)$$

[Auslander-Reiten, '74]

AR 双対で $Y = X$ とおいて次を得る.

系(概分裂完全列) 非射影的な直既約 Λ-加群 X に対し, 非分裂完全列

$$0 \to \tau X \xrightarrow{b} E \xrightarrow{a} X \to 0$$

で以下の性質を満たすものが存在する.

(1) X への任意の射で, 分裂全射でないものは, a を通過する.

(2) τX からの任意の射で, 分裂単射でないものは, b を通過する.

- この時, 直既約 Λ-加群 Y に対し,
  (AR quiver の Y から X への矢印の数)
  =(E の直和分解に現れる Y の個数)
- 特に AR quiver は局所有限.

以下の圏でもAR理論が知られている.

- 完備局所 Cohen-Macaulay 孤立特異点 Λ 上の, Cohen-Macaulay 加群の圏 $\mathrm{CM}\,\Lambda$.
- 大域次元有限の有限次元多元環 Λ の有界導来圏 $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\,\Lambda)$.

完全圏で, 射影的対象と入射的対象が一致して, ともに十分多いものを **Frobenius 圏**と呼ぶ.

- Frobenius 圏の安定圏は三角圏をなす. [Happel, '87]
- 特に以下の圏は三角圏をなす.
  $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ (Λ : 有限次元自己入射多元環)
  $\underline{\mathrm{CM}}\,\Lambda$ (Λ : 完備局所 Gorenstein 孤立特異点)

- これらの圏は $\mathbf{S} := [1] \circ \tau$ を Serre 関手とした**Serre双対**

$$\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(X, Y) \simeq D\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(Y, \mathbf{S}\, X)$$

を満たす.

- $[n]$が Serre 関手を与える三角圏を n**-Calabi-Yau** と呼ぶ.
- Λ : 有限次元対称多元環 $\Rightarrow$ $\underline{\mathrm{mod}}\ \Lambda$ は (-1)-Calabi-Yau.
- Λ : 完備局所 Gorenstein 孤立特異点 $\Rightarrow$ $\underline{\mathrm{CM}}\ \Lambda$ は $(\dim \Lambda - 1)$-Calabi-Yau.

今日の目標

- Calabi-Yau 的三角圏のより多くの例を, 多元環を用いて構成する.
- それらの三角圏が**クラスター傾斜対象**を持つことを要請する.

三角圏 $\mathcal{C}$ の対象 M が n-**クラスター傾斜対象** ($n > 0$) であるとは,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{add} M \ (:= M \text{の直和の直和因子全体}) \\
&= \{X \in \mathcal{C} \mid \operatorname{Hom}(M, X[i]) = 0 \ (0 < i < n)\} \\
&= \{X \in \mathcal{C} \mid \operatorname{Hom}(X, M[i]) = 0 \ (0 < i < n)\}
\end{aligned}$$

- この時, M はn-**rigid**, すなわち $\operatorname{Hom}(M, M[i]) = 0 \ (0 < i < n)$.
- n-クラスター傾斜対象 M は, n-rigid なもののうち最大. すなわち $M \oplus N$ が n-rigid $\Rightarrow N \in \operatorname{add} M$.

- M が $\mathcal{C}$ の 1-クラスター傾斜対象
$\iff \mathcal{C} = \operatorname{add} M$.

例 (不変式環)

- k : 標数0
$G \subset \mathrm{SL}(d, k)$: 有限部分群
$S := k[[x_1, \cdots, x_d]]$
- G の $k^d \backslash \{0\}$ への作用は自由と仮定.
- この時, 不変式環 S^G は d 次元完備局所 Gorenstein 孤立特異点.
- S は $(d-1)$-Calabi-Yau 三角圏 $\underline{\mathrm{CM}}\ S^G$ の $(d-1)$-クラスター傾斜対象.
- 特に $d = 2$ の場合, CM $S^G = \operatorname{add} S$ より S^G は有限表現型.
[Herzog, '78] [Auslander, '86]

定理(森田同値) 環 Λ, Γ に対し, 以下は同値.

(1) $\mathrm{Mod}\,\Lambda$ と $\mathrm{Mod}\,\Gamma$ は圏同値.

(2) 以下を満たすΛ-加群 P が存在.

(i) P は有限生成射影 Λ-加群.

(ii) 全射 $P^n \to \Lambda$ $(n > 0)$ が存在.

(iii) $\mathrm{End}_\Lambda(P) \simeq \Gamma$.

この定理の拡張を考える.

- $\mathrm{mod}\,\Lambda$ の充満部分圏の対 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ が **ねじれ理論**であるとは,

$$\mathcal{T} = \{X \in \mathrm{mod}\,\Lambda \mid \mathrm{Hom}_\Lambda(X, \mathcal{F}) = 0\},$$
$$\mathcal{F} = \{X \in \mathrm{mod}\,\Lambda \mid \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathcal{T}, X) = 0\}.$$

- この時, 任意の $X \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ に対し 完全列 $0 \to T \to X \to F \to 0$ $(T \in \mathcal{T},\ F \in \mathcal{F})$ が存在.

- Λ-加群 T が**傾斜加群**とは,

  (1) T の射影次元は1以下.

  (2) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,T)=0$.

  (3) Λ-加群の完全列

  $$0 \to \Lambda \to T_0 \to T_1 \to 0 \quad (T_i \in \mathrm{add}T)$$

  が存在. [Brenner-Butler, '80]

- $\Gamma := \mathrm{End}_\Lambda(T)$ とおくと, T は傾斜 Γ^{op}-加群で $\Lambda = \mathrm{End}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(T)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &:= \{X \in \operatorname{mod}\Lambda \mid \operatorname{Ext}^1_\Lambda(T,X)=0\},\\
\mathcal{F} &:= \{X \in \operatorname{mod}\Lambda \mid \operatorname{Hom}_\Lambda(T,X)=0\},\\
\mathcal{X} &:= \{X \in \operatorname{mod}\Gamma \mid T\otimes_\Gamma X=0\},\\
\mathcal{Y} &:= \{X \in \operatorname{mod}\Gamma \mid \operatorname{Tor}^\Gamma_1(T,X)=0\}.
\end{aligned}$$

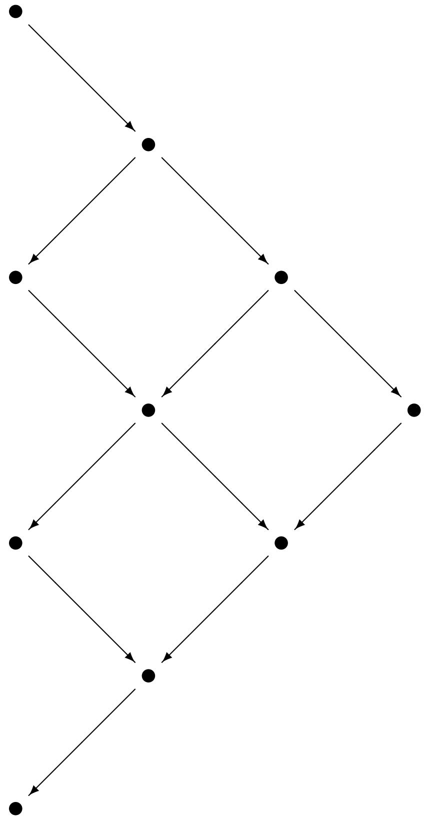
定理 (1) $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ と $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ はねじれ理論.
(2) 以下は圏同値.

$$\mathcal{T} \underset{T\otimes_\Gamma -}{\overset{\operatorname{Hom}_\Lambda(T,-)}{\rightleftarrows}} \mathcal{Y}$$

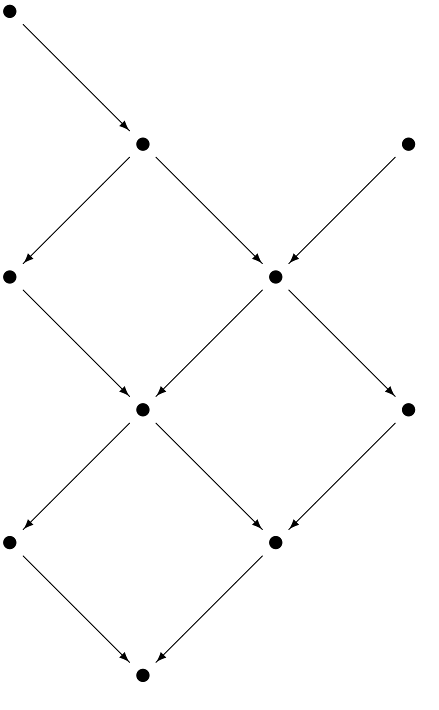
$$\mathcal{F} \underset{\operatorname{Tor}^\Gamma_1(T,-)}{\overset{\operatorname{Ext}^1_\Lambda(T,-)}{\rightleftarrows}} \mathcal{X}$$

[Brenner-Butler, '80]

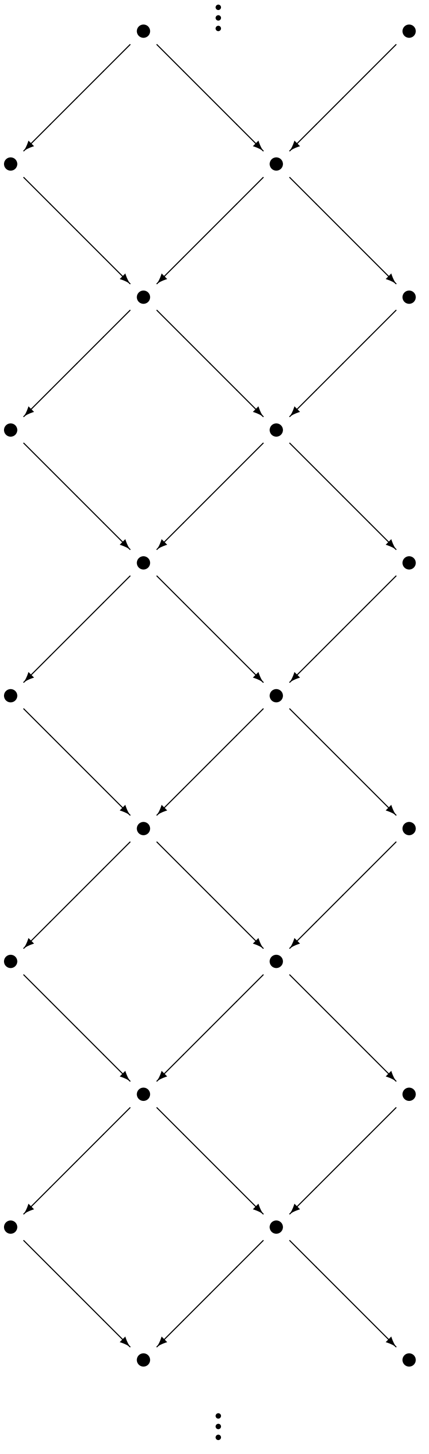
この圏同値は, 導来圏の観点からよりよく理解される.



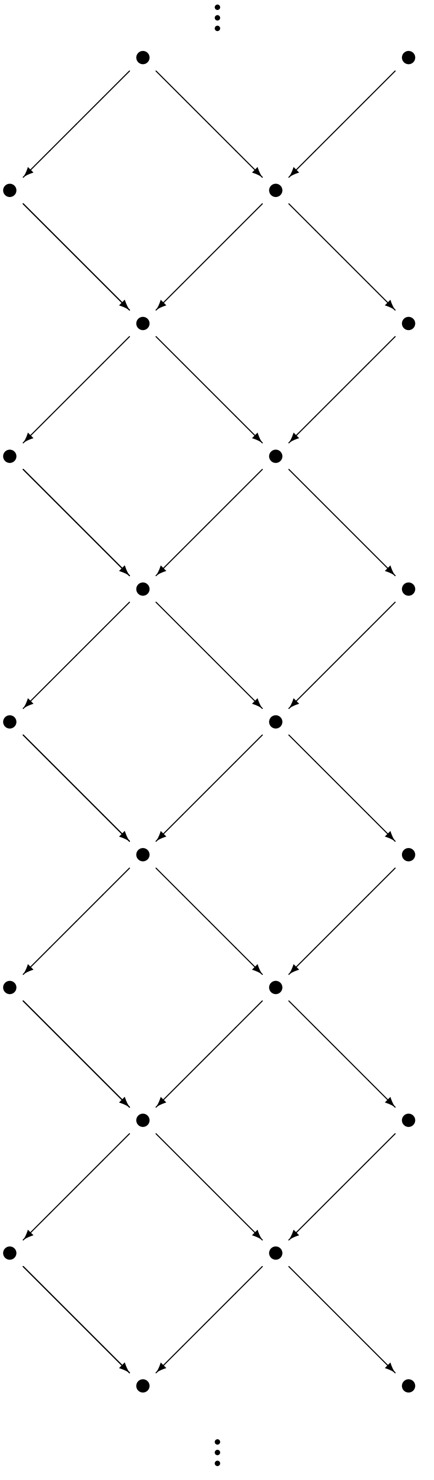
$\operatorname{mod}\Lambda$



$\operatorname{mod}\Gamma$



$\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}\Lambda)$



$\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}\Gamma)$

$\mathcal{D}(\mathrm{Mod}\,\Lambda)$: Λ-加群の圏の導来圏
$\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{pr}\,\Lambda)$: 有限生成射影 Λ-加群の有界複体のホモトピー圏

定義 $T \in \mathcal{D}(\mathrm{Mod}\,\Lambda)$ が**傾斜複体**とは
(1) $T \in \mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{pr}\,\Lambda)$,
(2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathrm{Mod}\,\Lambda)}(T, T[i]) = 0$ $(i \neq 0)$,
(3) T を含む $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}\,\Lambda)$ の三角部分圏で, 直和因子で閉じた最小のものは $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{pr}\,\Lambda)$.

- 射影次元1以下の加群である傾斜複体 $\Longleftrightarrow$ 傾斜加群

定理 環Λ, Γに対し, 以下は同値.
(1) $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}\,\Lambda)$ と $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}\,\Gamma)$ は三角同値.
(2) $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{pr}\,\Lambda)$ と $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{pr}\,\Gamma)$ は三角同値.
(3) Λ の傾斜複体 T で, $\mathrm{End}_{\mathcal{D}(\mathrm{Mod}\,\Lambda)}(T) \simeq \Gamma$ となるものが存在.
[Rickard, '89]

傾斜加群の組み合わせ的構造

- 加群が**基本的**とは, 互いに非同型な直既約加群の直和である事.
- 基本的な傾斜 Λ-加群は, 単純 Λ-加群の個数だけ直和因子を持つ.
- 基本的な傾斜 Λ-加群 T, U に対して,

$$
\begin{aligned}
T \le U \quad &\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \operatorname{Ext}^1_\Lambda(T, U) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \mathcal{T}(T) \supseteq \mathcal{T}(U) \\
&\Longleftrightarrow \mathcal{F}(T) \subseteq \mathcal{F}(U).
\end{aligned}
$$

  [Riedtmann-Schofield, '91]
  傾斜 Λ-加群全体は半順序集合を成す.

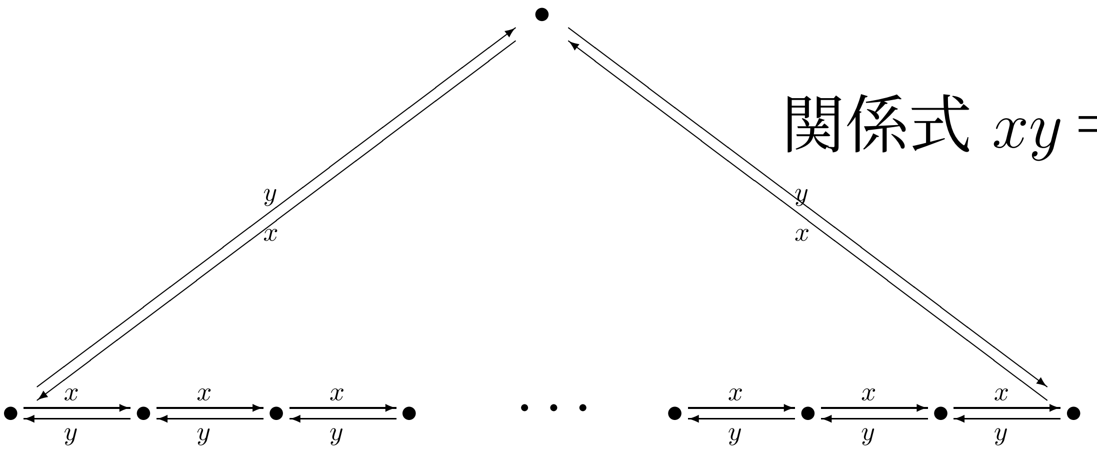
- 最小元は Λ.

- $T < U$ の時, 以下は同値.
  (1) $T \leq V \leq U \Rightarrow V = T$ or $V = U$.
  (2) T と U の直既約直和因子は, 一つを除いて一致する.
- この時, T と U は**mutation** の関係にあるという.
  mutation＝直既約直和因子の取替え
- $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$ (T_i : 直既約) の時, 各 i に対して, T_i を取替えて得られる mutation は高々1個.
- 特に T の mutation は, 高々n個.
- 基本的傾斜加群が有限個しか無い時, それらは mutation の合成で移りあう.

同様の構造は, 三角圏のクラスター傾斜対象に対しても存在する.

Δ : 拡大 Dynkin 図形

Λ : Δの preprojective 多元環



関係式 $xy = yx$

$$1 = e_1 + \cdots + e_n \quad \text{原始直交冪等元}$$

$$I_i := \Lambda(1 - e_i)\Lambda \quad \Lambda\text{の両側イデアル}$$

- I_i は傾斜 Λ-加群

$\langle I_1, \cdots, I_n \rangle$: $I_1, \cdots, I_n$ の積で表される Λ のイデアル全体

定理 $\{$基本的傾斜 Λ-加群$\} = \langle I_1, \cdots, I_n \rangle$.

[I.-Reiten]

以下の関係式が成立

- $I_i^2 = I_i$,
- $I_i I_j = I_j I_i$ (i と j の間に辺が無い)
- $I_i I_j I_i = I_j I_i I_j$ (i と j の間に辺が1本)

$W = \langle s_1, \cdots, s_n \rangle$: Δの affine Weyl 群

- $s_i^2 = 1$,
- $s_i s_j = s_j s_i$ (i と j の間に辺が無い)
- $s_i s_j s_i = s_j s_i s_j$ (i と j の間に辺が1本)

定理 (1) 次の全単射が存在.

$$W \to \langle I_1, \cdots, I_n \rangle$$

$s = s_{a_1} \cdots s_{a_k}$ (最短表示) $\mapsto I_{a_1} \cdots I_{a_k}$

(2) この全単射で, 以下のものが一致.

- W の Bruhat 順序と, $\langle I_1, \cdots, I_n \rangle$ のイデアルの包含関係の逆順序.
- W の右順序と, 傾斜 Λ-加群の順序.
- W の左順序と, 傾斜 Λ^{op}-加群の順序.

[I.-Reiten]

$w_i \in W \longleftrightarrow T_i$: 傾斜 Λ-加群
T_1 と T_2 が mutation の関係 $\Longleftrightarrow$
$w_1 = w_2 a_i$ となる $1 \leq i \leq n$ が存在.

- W の元の, 右順序での増大列をとる.

$$1 < s_{a_1} < s_{a_1}s_{a_2} < s_{a_1}s_{a_2}s_{a_3} < \cdots$$

- $T_i := I_{a_1} \cdots I_{a_i}$ とおくと, イデアルの減少列

$$\Lambda = T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \cdots$$

と傾斜 Λ-加群の増大列を得る.

$$\Lambda = T_0 < T_1 < T_2 < T_3 < \cdots$$

- $\Lambda_i := \Lambda/T_i$ と置くと, 有限次元多元環の全射の列を得る.

$$\cdots \to \Lambda_3 \to \Lambda_2 \to \Lambda_1$$

- $\mathrm{inj.dim}\,_{\Lambda_i}(\Lambda_i) = \mathrm{inj.dim}(\Lambda_i)_{\Lambda_i} \leq 1.$

$$\begin{aligned} &\mathrm{CM}\,\Lambda_i \\ := \ &\{X \in \mathrm{mod}\,\Lambda_i \mid \mathrm{Ext}^1_{\Lambda_i}(X, \Lambda_i) = 0\} \end{aligned}$$

- $\mathrm{CM}\,\Lambda_i$ は Frobenius 圏.

安定圏 $\underline{\mathrm{CM}}\Lambda_i$ は三角圏.

定理 (1) $\underline{\mathrm{CM}}\Lambda_i$ は 2-Calabi-Yau 三角圏.
(2) $\oplus_{0<j\leq i}\Lambda_j$ は $\underline{\mathrm{CM}}\Lambda_i$ の 2-クラスター傾斜対象.
[Buan-I.-Reiten-Scott]

例1 (Dynkin型preprojective多元環)

- $W' := \langle s_1, \cdots, s_{n-1}\rangle \subset W$
- 最長元 $w \in W'$ に対し, 増大列を取る.

  $$1 < s_{a_1} < s_{a_1}s_{a_2} < \cdots < s_{a_1}\cdots s_{a_k} = w$$

- この時, Λ_k は Dynkin 図形の preprojective 多元環.
- 特に $\underline{\mathrm{CM}}\ \Lambda_k$ は 2-Calabi-Yau 三角圏.
  [Crawley-Boevey, Auslander-Reiten]
- 特に $\oplus_{0<j\leq k}\Lambda_j$ は $\underline{\mathrm{CM}}\ \Lambda_k$ の 2-クラスター傾斜対象.
  cf. [Geiss-Leclerc-Schröer]

例2 (クラスター圏)

- Coxeter 元 $c = s_1 \cdots s_n \in W$ に対し, c^2 までの増大列を取る.

$$
\begin{aligned}
1 < s_1 < \cdots < c = s_1 \cdots s_n < \cdots \\
\cdots < s_1 \cdots s_n s_1 \cdots s_n = c^2
\end{aligned}
$$

- この時, $H := \Lambda_n$ は拡大 Dynkin 図形の道多元環.
- H に付随した**クラスター圏**

$$\mathcal{C}_H := \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\, H)/(\tau^{-1} \circ [1])$$

  は 2-Calabi-Yau 三角圏.

  [Buan-Marsh-Reineke-Reiten-Todorov] [Keller]

- $\underline{\mathrm{CM}}\, \Lambda_{2n}$ は $\mathcal{C}_H$ に三角同値.
- 特に $H \simeq \oplus_{0<j\leq 2n} \Lambda_j$ は $\mathcal{C}_H \simeq \underline{\mathrm{CM}}\, \Lambda_{2n}$ の 2-クラスター傾斜対象.