

7-2

Berndtsson の凸性定理.

0日目. おさらい.

小平消滅定理 \rightarrow 大沢竹腰 \rightarrow Berndtsson.

KE 計量 \wedge (\mathbb{P}^2 の 1 点 \mathbb{P}^1 の $-$ 一意性)

1日目. Kähler 計量, Ricci 曲率,

正則直線束.

小平消滅定理の $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

(埋込定理, 特異計量, Nadel の消滅定理)

2日目. Berndtsson の定理

3日目. 等号成立の場合, KE 計量の一意性.

4日目. テスト配位, D 安定性.

(KE 計量は存在するのか?)

5日目. 逆 MA 流.

(存在しない条件が起こる?)

0日目

「 $\bar{\partial}$ 方程式」

$\Omega \subset \mathbb{C}$ 領域上の関数で

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} > 0$$

とあるものを考える。(ポテンシャル関数)

このとき、「 $\bar{\partial}$ 方程式」: $\bar{\partial}u = f$ が L^2 評価

$$\int_{\Omega} |u|^2 e^{-\varphi} \leq \int_{\Omega} \frac{|f|^2}{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}}} e^{-\varphi}$$

付きで解ける。

PTTP (これは1日目でやる方が良さかも)

$$\bar{\partial}u = f$$

$$\Leftrightarrow - \int u \bar{\partial} \alpha = \int f \alpha \quad \forall \alpha \in C_0^2(\Omega)$$

α を $\bar{\partial} \alpha e^{-\varphi}$ に置き換えると

$$\Leftrightarrow \int u (\bar{\partial} \alpha e^{-\varphi}) = \int f \bar{\alpha} e^{-\varphi} \quad \forall \alpha \in C_0^2$$

ただし

$$\bar{\partial} \alpha e^{-\varphi} := - e^{\varphi} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (e^{-\varphi} \alpha)$$

は、 L^2 内積

$$\langle f, g \rangle := \int f \bar{g} e^{-\varphi}$$

に関する、 $\bar{\partial}$ の形式的随伴作用素

従って Cauchy-Schwartz 不等式によ

$$\left| \int f \bar{\alpha} e^{-\varphi} \right|^2 \leq C \int |\bar{\partial} \alpha e^{-\varphi}|^2 \quad \forall \alpha \in C_0^2$$

..... (*)

が成り立つ。

逆に (*) が成り立つとすると、

$$L: \bar{\partial} \alpha e^{-\varphi} \mapsto \int f \bar{\alpha} e^{-\varphi}$$

は (Hahn-Banach の定理によ) 重み付き L^2 空間

$L^2(\Omega, e^{-\varphi})$ 上の反線形形式関数 L

$\|L\| \leq C$ とあるものに拡張する。

Riesz の表現定理から

$$L(g) = \int u \bar{g} e^{-\varphi} \quad \forall g \in L^2(e^{-\varphi})$$

とある $u \in L^2(e^{-\varphi})$ なる $\int |u|^2 e^{-\varphi} \leq C$ とあるものが得られる。

「 $\bar{\partial}$ と $\bar{\partial} \alpha e^{-\varphi}$ を連結させる」
証明の方が分かりやすいか?

とくに $g = \bar{\partial}_\varphi \alpha$ とおけば

$\bar{\partial}$ 方程式が解けることとなる。

さらに、関数 $\mu > 0$ を取ると

$$\int_{\Omega} \frac{|f|^2}{\mu} e^{-\varphi} \leq C \quad \text{とすると } f \in C^0 \text{ が成り立つ}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega} \mu |\alpha|^2 e^{-\varphi} \leq \int_{\Omega} |\bar{\partial}_\varphi \alpha|^2 e^{-\varphi} \quad \forall \alpha \in C_0^\infty$$

よって、

$\bar{\partial}$ 方程式が解けるかどうかはこの (f に依らずに) 積分不等式に帰着される。

Prop

$$\begin{aligned} & \int (\bar{\partial}\bar{\partial}\varphi) |\alpha|^2 e^{-\varphi} + \int |\bar{\partial}\alpha|^2 e^{-\varphi} \\ &= \int |\bar{\partial}_\varphi \alpha|^2 e^{-\varphi} \end{aligned}$$

//

d作用素についても同様の評価が得られ、

Prekopa の定理:

$\Phi(t, x) = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ 上の凸関数に対し

$$L(t) := -\log \int e^{-\Phi} dx$$

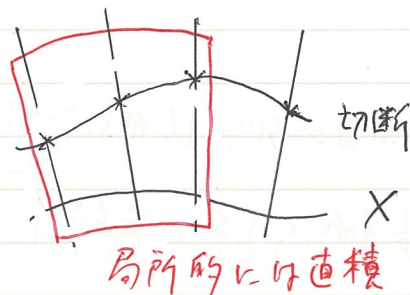
は凸関数。

が導かれる。(詳細は Berndtsson の L94p-11 参照)

Hörmander L^2 評価は高次元化できる。

X : cpt 複素多様体

$L \rightarrow X$ 正則直線束



L は X の各点に
1次元 \mathbb{C} ベクトル空間を並べたもの

各点に対し \mathbb{C} の元を1つずつ対応させるものを
切断 σ とし、

$\bar{\partial}$ 作用素が定義できる。

±3に、Lに値を持つ(p, q)形式

$$f(z^1, \dots, z^n) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^p \wedge d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}^q$$

(p, q)形式
Lの切断 (局所的には二重積分)

が定義できて、

$$\bar{\partial}: A^{p, q}(L) \rightarrow A^{p, q+1}(L)$$

が定まる。

$e^{-\phi}$ on Ω は、LのFubini-Study計量と見做せる。

つまり、Lを局所的に直積と見做して

$$\xi \in L_x \simeq \mathbb{C} \text{ の長さを } |\xi|^2 e^{-\phi(x)}$$

と定まるのである。

ϕ は局所的にしか定義されていないが、Lはコンパクト

だから合わせるとよくて統制されている。ただし、

$$\sqrt{\partial\bar{\partial}\phi} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^i \partial \bar{z}^i} \sqrt{dz^1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}^n}$$

はX上の2-formとして定まる。

$$\sqrt{\partial\bar{\partial}\phi} > 0 \text{ は } n \times n \text{ 行列 } \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) \text{ が}$$

各点で正定値とuj条件に与る。

$L = X \times \mathbb{C}$ だとこのように ϕ は存在する。
これは直線束を考へる理由である。

$$\text{一方、2-form } \omega = g_{i\bar{j}} \sqrt{dz^1 \wedge d\bar{z}^1} \dots$$

$$g_{i\bar{j}} = g_{\bar{j}i}, g_{i\bar{i}} > 0, d\omega = 0$$

とあるものは(Xが代数多様体)豊富に存在する。

これはXのKähler計量と呼ばれるものである。

$g_{i\bar{j}}$ を使えば“(p, q)形式”の長さを測ることができると、
そのようにものを1つ固定し、

$$\sqrt{\partial\bar{\partial}\phi} \geq \varepsilon \cdot \omega$$

が成り立ち、これを仮定する。

Then (小平、Hörmander)

$\bar{\partial}$ 閉な(n, q)形式 f に対し $\bar{\partial}u = f$ が

$$\int_X |u|^2 e^{-\phi} \frac{\omega^n}{n!} \leq \frac{1}{\varepsilon q} \int_X |f|^2 e^{-\phi} \frac{\omega^n}{n!}$$

とuj L^2 評価が成り立つ。解ける。

とくに コホモロジー群

$$H^{n,0}(X, L) = H^0(X, K_X + L)$$

が消える. (小平消滅定理)

コホモロジー群が消えるような状況でも
切断を得るため, 小平消滅定理の拡張が
試みられてきた.

その1つの到達点と呼べるものが今回の主題である
B Berndtsson の定理である.

簡単のため, $L = -K_X > 0$ (Fano 多様体)

の場合を考える.

このとき, Berndtsson の定理は

$$L(t) = -\log \int_X e^{-\Phi} \quad \Phi: \mathbb{C} \times X \text{ 上 定義域 } P_2^*L \text{ の } \bar{\partial}\text{-計量}$$

$$\text{が} \quad \int_{t,x} \bar{\partial}\bar{\partial}\Phi \geq 0$$

という条件の下で 凸になることを主張する.

「KE計量」

集中講義では, このような凸性と

ここまで 8枚
(90分)

X の KE 計量 との関係について話した.

Kähler 計量 ω が

$$\text{Ric } \omega - \omega = 0$$

を満足するとき KE 計量と呼ぶ.

このとき X は自動的に Fano 多様体になる.

しかしながら, Fano 多様体があっても KE 計量を持つとは
限らない.

例えば \mathbb{P}^2 は KE 計量を持つが

その1点 blow-up は持たない.

Aubin - 満洲エネルギーを

$$E(\varphi) := \frac{1}{(n+1)V} \sum_{i=0}^n \int_X (\varphi - \varphi_0) (\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^i \wedge (\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_0)^{n-i}$$

と定義すると 実は

$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$ が KE 計量

$\Leftrightarrow \varphi$ が “エネルギー”

$$D(\varphi) := -\log \int_X e^{-\varphi} - E(\varphi) \text{ の臨界点}$$

となり,

エネルギーの増大度と KE 計量の存在が

関連づけられる. (計量の一意性もこの線を示せる.)

1日目.

Bernstein の凸性定理を示す(明日)前に
基本的な用語をおさらいしておく.

Def この辺り本当に必要か?

正則写像 $\pi: E \rightarrow X$

1) π は全射で、 $\forall x \in X$ に対し
 $\pi^{-1}(x) = \pi^{-1}(x)$ は N 次元ベクトル空間

2) $X = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ 開被覆で

$$\pi^{-1}(U_{\alpha}) \xrightarrow{f_{\alpha}} U_{\alpha} \times \mathbb{C}$$

$$\pi \searrow U_{\alpha} \swarrow p_1$$

を可換にし、各 $\pi^{-1}(x)$ の同型を ξ_x と f_{α} が
存在する.

$$f_{\alpha} \circ f_{\beta}^{-1}(z, w) = (z, g_{\alpha\beta}(z)w)$$

よって $g_{\alpha\beta}: U_{\alpha} \cap U_{\beta} \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$ 正則写像
を定義すると、コサッカル条件

$$g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} \quad \text{が成り立ち、} z \in U_{\alpha} \cap U_{\beta} \cap U_{\gamma}.$$

逆に n の n 個の $g_{\alpha\beta}$ から正則ベクトル束が復元できる。

例 1

射影空間 \mathbb{P}^n の各点に

対応する A^{n+1} の原点を通る直線を並べたもの。

$$= \left\{ (z_1, \dots, z_{n+1}), [X_1, \dots, X_{n+1}] \in A^{n+1} \times \mathbb{P}^n \right. \\ \left. : z_\alpha X_\beta = z_\beta X_\alpha \right. \\ \left. 1 \leq \alpha, \beta \leq n+1. \right\}$$

$\pi: L \rightarrow \mathbb{P}^n$ 射影.

$$U_\alpha := \{ X_\alpha \neq 0 \}$$

$$g_{\alpha\beta} = \frac{X_\alpha}{X_\beta} \quad (\mathbb{C}^* = GL(1; \mathbb{C}) \text{ の正則写像})$$

これを $O_{\mathbb{P}^n}(-1)$ と書く。

Grassmann で同じことをすれば $N \geq 2$ のベクトル束に存在。

例 2

勝手な X に対し

$U_\alpha =$ 正則局所座標近傍 with $(z_\alpha^1, \dots, z_\alpha^n)$

$$g_{\alpha\beta} = \det \left(\frac{\partial z_\alpha^i}{\partial z_\beta^j} \right)_{i,j=1}^n$$

は正則直線束を定める。

これを K_X と書く。 \det をとる ω を余接束 $\Omega_X^{1,0}$ (や $\Omega_X^{0,1}$) が定まる。

定義

滑らかな写像 $S: X \rightarrow E$ で

$$\pi \circ S = \text{id}_X$$

となるものを、 E の切断と呼ぶ。

$N=1$, $E = X \times \mathbb{C}$ のときは X 上の関数と他なるもの。切断とは、つまり“おいた”関数である。

実際

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{F_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{C} \\ & \searrow S & \downarrow \text{ } \\ & & U_\alpha & \swarrow & (z, S_\alpha(z)) \end{array}$$

として、局所的に関数 S_α を得る。

この S_α は

$$S_\alpha = g_{\alpha\beta} S_\beta \quad \text{on } U_\alpha \cap U_\beta$$

を満たす. 逆にこの条件を満たす S_α on U_α は E の切断を定める.

さらに, $(0,1)$ 形式 $\bar{\partial} S_\alpha$ たちは

E の $\Omega_X^{0,1}$ の切断

を定める. \leftarrow 各点 x でのテンソルを \mathbb{R}^n とする $\wedge^2 \mathbb{R}^n$ 束

$$\bar{\partial} S = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad S: X \rightarrow E \text{ が "正則写像"}$$

が成り立つ.

このように S を 正則切断 とす.

一般に E の $\Omega_X^{p,q}$ の切断を E 値 (p,q) 形式

とす.

$$\bar{\partial} = A^{p,q}(E) \rightarrow A^{p,q+1}(E)$$

が定義できる.

例 1

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ の双対 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$

の k 回テンソル $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ と書く.

1次斉次式 $a_1 X_1 + \dots + a_{n+1} X_{n+1}$ は,

$$S_\alpha := \frac{a_1 X_1 + \dots + a_{n+1} X_{n+1}}{X_\alpha}$$

とかくと $\mathcal{O}(1)$ の正則切断を定める.

同様に, k 次斉次式 S は $\mathcal{O}(k)$ の正則切断.

実は正則切断は \mathbb{Z} のようなものしかない. (Serre.)

以下
ファイバー-計量 正則直線束 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ を考へる。

仮に L の各ファイバーで $\pi^{-1}(U_\alpha)$ の長±が α に依存すると
 すると

$$\pi^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times \mathbb{C}$$

よって $f_\alpha^{-1}(z, w)$ の長±が決まる。それを

$$= |w|^2 e^{-\varphi_\alpha(z)}$$

と書くと

$$\varphi_\alpha = \log |g_{\alpha\beta}|^2 + \varphi_\beta$$

が成り立つ。

この様な φ_α たちのことを (厳密には $e^{-\varphi_\alpha}$ のことを)

L の ファイバー-計量 と呼ぶ。

長± α のものは α に依存して定まることに注意。

Def

$\int \bar{\partial} \varphi_\alpha$ は α に依存せず、

X 上の 実 (1,1) 形式' を定める。

これを ファイバー-計量の曲率 とする。

実は Chern 接続の曲率
 $\nabla''^2 = \partial - \bar{\partial} \varphi$

実際、 $g_{\alpha\beta} \neq 0$ なる各点の近傍上 \log の分枝がとれるので

$$\sqrt{\partial \bar{\partial}} (\log g_{\alpha\beta} + \log \bar{g}_{\alpha\beta}) = 0$$

//

L の ファイバー-計量 $e^{-\varphi}$ として

$$\sqrt{\partial \bar{\partial}} \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \sqrt{dz^i \wedge d\bar{z}^j} > 0$$

となるものが存在するとき、

L は 正 (positive) であるとする。

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) > 0$ 、 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ や $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ はそうではない。

$L > 0$ であるとは (小平の消滅定理の帰結として)
 L が十分多くの正則切断を持つことと同値になる。

$$\varphi_\alpha = \log \left(\left| \frac{x_1}{x_\alpha} \right|^2 + \dots + \left| \frac{x_{n+1}}{x_\alpha} \right|^2 \right)$$

一般に $[\int \bar{\partial} \varphi] \in H^2(X, \mathbb{R})$ は

L の Chern 類 $c_2(L)$ と呼ばれるものと一致する。

(これは $c_2(L)$ の定義と思ってもよい。)

$L > 0$ は $c_2(L)$ に正定値形式' が含まれることと同値。

\downarrow
 $\forall w$ は ファイバー-計量の曲率 として表せる。

Kähler 計量

X 上の実 $(2,2)$ 形式

$$\omega = \sqrt{-1} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^{\bar{j}}$$

$$\omega \begin{cases} g_{i\bar{j}} > 0 \\ d\omega = 0 \end{cases}$$

とあるものを Kähler 計量 とす。

先ほどの $\sqrt{-1} \partial\bar{\partial} \phi > 0$ は Kähler 計量の例。

アインシュタイン計量 ... $\gamma \in L_X$ の長さを測る

Kähler 計量 ... $v \in T_X^{1,0}$ の長さを測る。

\leadsto (p.8) 形式 ω による長さを測るようになる。

とくに

$\det(g_{i\bar{j}})$ は $-K_X := \wedge^n T_X^{1,0}$ の

アインシュタイン計量を定める。その曲率は

$$\text{Ric}(\omega) := -\sqrt{-1} \partial\bar{\partial} \log \det(g_{i\bar{j}})$$

$$\in 2\pi c_2(X)$$

で与えられる。

$\text{Ric}(\omega)$ を Ricci 曲率 とす。

この#2 9枚
(90分.)

定義

$$\text{Ric} \omega = \lambda \cdot \omega \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}$$

とある ω を Kähler-Einstein 計量 とす。

$$\lambda = \pm 1, 0 \text{ とする。}$$

両辺のコホモロジー類をとると、

$$2\pi \cdot c_2(X) = \lambda \cdot [\omega]$$

とあり、 X の幾何に制限が入る。

この補題により、これは $\exists \omega \text{ Ric} \omega > 0$ と同値。

このような X を Fano 多様体 とす。

例

$$X = \mathbb{P}^2, \quad -K_X \simeq \mathcal{O}(3) \text{ なる } \mathbb{P}^2 \text{ Fano.}$$

$\sqrt{-1} \partial\bar{\partial} \log(|X_1|^2 + |X_2|^2 + |X_3|^2)$ の定数倍

が KE 計量 になる、とす。

1点 $\mathbb{P}^0 - \mathbb{P}_1 \mathbb{P}^0$, 2点 $\mathbb{P}^0 - \mathbb{P}_1 \mathbb{P}^0$ も Fano だが KE を持たない

3点 $\mathbb{P}^0 - \mathbb{P}_1 \mathbb{P}^0$ は KE を持つ!

特異 Fano-計量

一般に、 $\varphi_\alpha \in L^1_{loc}(U_\alpha)$ で

$$\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \varphi_\alpha \geq 0 \quad (\text{カレント})$$

とあるものを考えたときでいい。

Hörmander L^2 評価はこのように計量及び

$e^{-\varphi}$ による 2乗可積分な関数によるもの成り立つ。

$$\int_X |u|^2 e^{-\varphi} dV_\omega < +\infty$$

は、かつ u が $\varphi = -\infty$ とある点において消えるという情報を引き出し、応用上極めて便利なものとする。

$$H^0(X, K_X \otimes L \otimes \mathcal{O}(\varphi)) = 0 \quad \text{if } \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \varphi \geq \varepsilon \cdot \omega$$

を Nadel の消滅定理という。

幾何的な応用は Demailly の Lefschetz-等
が詳しい。

2日目

随半束の順像

設定

滑らかな

$B \subset \mathbb{C}$ 領域

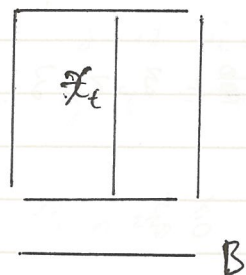
$$\pi: X \rightarrow B$$

cpt

複素多様体の変形

Z : X 上の正則直線束で、

$$Z_t = \pi^{-1}(t) \text{ に制限したものが } \geq 0$$



$$K_{X/B} := K_X - \pi^* K_B$$

を X_t に制限したものは $\simeq K_{X_t}$.

$\tilde{u} = u \wedge dt$ とする n 形式 u は
一意である、 X_t の制限の一意。

Fact

$$E := \pi_* (K_{X/B} + Z)$$

は B 上の正則ベクトル束

$$E_t = H^0(X_t, K_{X_t} + Z_t)$$

* 各 Fano-計量が Fano である状況です

$$K_X + L = \mathcal{O} \text{ だから } E \text{ は 直線束 と なる。}$$

(一般の場合には大沢-竹腰の L^2 拡張定理を使う)

$L = \mathcal{O}$ なる Hodge 数の局所定数性。

この正値性は Griffiths, 藤田による。

±3k, \mathcal{L} の Fubini-計量 $e^{-\Phi}$ について

$$\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \Phi \geq 0 \quad \text{on } \mathcal{X}$$

とあるものの

このとき, $S \in E_t$ に対し

$$\|S\|^2 := \int_{\mathcal{X}_t} \sqrt{-1}^2 S \wedge \bar{S} e^{-\Phi}$$

と定義すると, これは E の Fubini-計量と一致する.

各 Fubini-計量 L が Fano のときは L は

$$L(t) = -\log \int_{\mathcal{X}_t} e^{-\Phi} \quad \text{で定まる直線束の Fubini-計量.}$$

Thm (Berndtsson)

以上の設定の下で,

$$(E, \|\cdot\|) \rightarrow B \quad \text{は (中野の意味で)} \geq 0.$$

以下の証明は $N \geq 2$ でも通用する.

Cplx str が変わったときの Fano でもこの証明は成り立つ?

Fano Fubini-計量のときにこれを証明しよう.

一般に直線束 L の Fubini-計量 φ について

$$\partial \varphi := \partial - \partial \varphi \wedge.$$

この微分作用素は局所自明化に依って定まるとして,

$$\partial(S, S') = (\partial \varphi S, S') + (S, \bar{\partial} S')$$

を満たす. (直線束のときはこれを Chern 接続 $\nabla_E^{1,0}$ が定まる)

$\bar{\partial}$ は正則な構造から自然に決まるとして,

∂ は Fubini-計量に依る!

今の場合, E の Fubini-計量 L に対し

$$\partial(\sigma, \sigma) = (\partial_L \sigma, \sigma) + (\sigma, \bar{\partial} \sigma)$$

だから, σ が正則切断なら

$$= (\partial_L \sigma, \sigma) \quad \text{で}$$

一般に, 自明化して

$$f(z) = 1 + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(0) z \quad \text{でよい.}$$

±3k $\partial_L \sigma = 0$ at t_0 なら, 同じ点で

$$\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \|\sigma\|^2 = -(\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} L) \sigma, \sigma$$

計算したいもの

が成り立つ.

一般の E でも曲率が出てくる.

L^2 評価で

$\bar{\partial} \|\sigma\|^2$ を計算する

Siu のアイデアを使う.

かわりに $\log \|\sigma\|^2$ を微分してどうなるか?

左の曲率をさらに明示的に書くには,

σ を

だから Fano の σ は $K_{X/B} + \mathcal{L}$ と考えることが大切

又値 n 形式 u で

各 \mathbb{P}^1 の制限が $\sigma(t)$ と一致するもの

により表現する.

(X, \mathcal{L}) は \mathbb{C}^∞ には直積存在
そのような u が存在する.

Lem

σ を $E = \pi_* (K_{X/B} + \mathcal{L})$ の切断とすると,

$$\begin{cases} \bar{\partial} u = d\bar{t} \wedge v + dt \wedge \eta \\ \partial_{\bar{z}} u = dt \wedge \mu \end{cases}$$

と書ける. v や μ の X_t 上の制限は σ だけで決まる.

$$\begin{cases} \bar{\partial} \sigma \text{ は } d\bar{t} \wedge v \text{ で} \\ \partial_L \sigma \text{ は } dt \wedge \mathcal{P}(\mu) \text{ で表現される.} \end{cases}$$

ただし $\mathcal{P}(\mu)$ は $\mu|_{X_t}$ の $\ker \bar{\partial}$ への直交射影をつくるための.

* η は小平-Spencer 類と関係する. (後述)

$$[\partial \lrcorner u|_{x_0}] = [(-1)^n \eta|_{x_0}] \in H^{n-1,1}(x_0)$$

proof)

$$\partial(\sigma, \sigma') = (\partial_L \sigma, \sigma') + (\sigma, \bar{\partial} \sigma')$$

これより

$$\begin{aligned} \partial(\sigma, \sigma') &= \partial \pi_* (\sqrt{-1}^n u \wedge \bar{u}' e^{-\Phi}) \\ &= \sqrt{-1}^{n^2} \pi_* (\partial_{\bar{z}} u \wedge \bar{u}' e^{-\Phi}) \\ &\quad + (-1)^n \sqrt{-1}^n \pi_* (u \wedge \bar{\partial} u' e^{-\Phi}) \\ &= \sqrt{-1}^n \pi_* (dt \wedge \mu \wedge \bar{u}' e^{-\Phi}) \\ &\quad + \sqrt{-1}^{n^2} \pi_* (dt \wedge u \wedge \bar{v}' e^{-\Phi}) \end{aligned}$$

u' 側が \mathbb{P}^1 上では正則 n 形式だから

この μ は $\mathcal{P}(\mu)$ に置き換えられる.

$\bar{\partial} \sigma$ は $\frac{\partial u}{\partial \bar{t}}$ で与えられるから, $d\bar{t} \wedge v$ で表現されることはほぼ明らかである.

より具体的に

$$\partial_{\bar{z}} u = dt \wedge (\dot{u} - \dot{\Phi} u)$$

と書けるから,

$$\mathcal{P}(\mu) = \dot{u} - \mathcal{P}(\dot{\Phi} u)$$

となる.

$\bar{z} = z^{\bar{}}$, $\mathbb{R}t$ 上 (Kähler形式 ω_t を導入)

$$(*) \begin{cases} \partial_{\bar{z}} \alpha = P^{\perp}(\dot{\Phi}u) & \omega \wedge \eta \text{ は } \bar{\partial}\text{-完全} \\ \omega_t \wedge (\eta + \bar{\partial}\alpha) = 0 & \text{解 } \eta\text{-一意性} \\ & \alpha \text{ を } t \text{ に } \bar{\partial}\text{-滑らかにする} \end{cases}$$

この微分方程式を解くと,

$$\hat{u} := u - dt \wedge \alpha \quad \text{は } \sigma \text{ を表現 (} z \text{ 上)}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} \hat{u} &= dt \wedge (\mu + \partial_{\bar{z}} \alpha) \\ &= dt \wedge P(\mu) \end{aligned}$$

$$\text{を求めよ。} \quad \leftrightarrow \quad \partial_L \sigma$$

u を \hat{u} に置き換える!

方程式 (*) の置き換えから、先に曲率を計算すると

$$\bar{\partial} \|\sigma\|^2 = \bar{\partial} \bar{\partial} \sqrt{g}^n \pi_* (u \wedge \bar{u} e^{-\Phi})$$

$$\bar{\partial} \pi_* (u \wedge \bar{u} e^{-\Phi})$$

$$= \pi_* (\bar{\partial} u \wedge \bar{u} e^{-\Phi}) + (-1)^n \pi_* (u \wedge \bar{\partial} \bar{u} e^{-\Phi})$$

$dt \wedge \eta$ があるから第1項は消える。

$\mathbb{R}t$ 方向の (0,1) 因子が多過ぎるから

よって

$$\bar{\partial} \|\sigma\|^2$$

$$= (-1)^N (\sqrt{g})^n \pi_* (\partial_{\bar{z}} u \wedge \bar{\partial} \bar{u} e^{-\Phi}) + (\sqrt{g})^n \pi_* (u \wedge \bar{\partial} \bar{\partial} \bar{u} e^{-\Phi})$$

$$\bar{\partial} \partial_{\bar{z}} + \partial_{\bar{z}} \bar{\partial} = \bar{\partial} \bar{\partial} \Phi \text{ を用いて第2項を書き直すと}$$

$$\begin{aligned} &\bar{\partial} \pi_* (u \wedge \bar{\partial} \bar{u} e^{-\Phi}) \\ &= \pi_* (\bar{\partial} u \wedge \bar{\partial} \bar{u} e^{-\Phi}) + (-1)^n \pi_* (u \wedge \bar{\partial} \bar{\partial} \bar{u} e^{-\Phi}) \end{aligned}$$

左辺は (1,0) 因子が多過ぎるから消える。

よって、対称形式

$$= \sqrt{g}^n \left\{ \begin{aligned} &(-1)^n \pi_* (\partial_{\bar{z}} u \wedge \bar{\partial} \bar{u} e^{-\Phi}) \\ &+ (-1)^n \pi_* (\bar{\partial} u \wedge \bar{\partial} \bar{u} e^{-\Phi}) \\ &- \pi_* (u \wedge \bar{u} \wedge \bar{\partial} \bar{\partial} \Phi e^{-\Phi}) \end{aligned} \right\}$$

を得る。

よって $\partial_L \sigma = 0 \Leftrightarrow \partial_{\bar{z}} u = 0$ at t_0 とすると

第1項は消える、第2項は

$$\bar{\partial} u = dt \wedge \eta \text{ があるから (} \sqrt{g} \text{ 倍すると)}$$

$$\left(\sqrt{g}^n \int_{\mathbb{R}t_0} \eta \wedge \bar{\eta} e^{-\Phi} \right) \sqrt{g} dt \wedge d\bar{t}$$

がある。

ここまでは
OK.

ここで、一般に各ファイバ上で

$\omega \wedge \eta$ は $\bar{\partial}$ 完全.

でこれを注意する.

実際、 $\omega \wedge u = dt \wedge \xi$ と書けるか

両辺を $\bar{\partial}$ すると

$$\omega \wedge dt \wedge \eta = dt \wedge \bar{\partial} \xi$$

つまり ξ_t 上に制限すれば $\omega \wedge \eta$ は $\bar{\partial}$ 完全.

さらに u を $\hat{u} = u - dt \wedge \alpha$ に取り替える

η は 原始形式 (primitive form) とする.

primitive 存在

$$-\sqrt{n}^2 \int_{\xi_t} \eta \wedge \bar{\eta} e^{-\mathbb{I}} = - \int_{\xi_t} |\eta|^2 dV_\omega$$

か成り立つ.

レクチャー①: primitive form の存在性
Hodge 理論の部分の穴埋め,

$E = \pi_*(K_{X/B} + L)$ 2-rank ≥ 2 の
場合 η を整理する

詳しくは Berndtsson の論文に
書かれている.

方程式

$$(*) \begin{cases} \partial_{\mathbb{I}t} \alpha = \beta \\ \omega_t \wedge \bar{\partial} \alpha = \gamma \end{cases}$$

$\ker \bar{\partial}$ と直交

ここで 9 枚.
(90分.)

$\bar{\partial}$ 完全.

は Hodge 理論で次の様に解くことが出来る:

まず A "正則形式" と直交する

$$\begin{cases} \bar{\partial} A = \gamma \\ \bar{\partial}_\varphi^\# A = \beta \end{cases} \quad A: (n,1)\text{形式}$$

か解ける.

Kähler identity $\partial_\varphi = -\sqrt{-1} [\bar{\partial}^\#, \omega \wedge]$ より

$$\omega \wedge \alpha = A \quad \text{とよ、2 定まる } \alpha \text{ が (up to sign)}$$

求まるものとする.

$$(\ker \bar{\partial})^\perp = \text{Im } \bar{\partial}_\varphi^\# \text{ より } \beta = \bar{\partial}^\# \chi \text{ と書ける.}$$

$$\begin{cases} \bar{\partial} A' = \gamma - \bar{\partial} \chi \\ \bar{\partial}_\varphi^\# A' = 0 \end{cases} \quad \text{を解く.}$$

$$A = A' + \chi \quad \text{で OK}$$

3日目.

この日は t, τ 中 γ を持て,

$\pi_*(K_{\mathbb{R}^n/B} + \mathcal{L}) \geq 0$ の等号成立条件
を考える.

簡単のため, $\mathbb{R} = B \times X$ とする. すると

$$\bar{\omega} = \underbrace{d\bar{t} \wedge V + dt \wedge \eta}_{\bar{\sigma} \text{ の表現}}$$

に於て $\eta = 0$ とし $\bar{\omega}$. この u に對し

$$\hat{u} := u - dt \wedge \alpha \quad \text{を考える.}$$

すると曲率公式は

$$(\sqrt{\bar{\omega} \bar{\omega} L})_{\sigma, \sigma}$$

$$= (\sqrt{\bar{\omega}})^n \pi_*(\sqrt{\bar{\omega} \bar{\omega} \Phi} \wedge \hat{u} \wedge \overline{\hat{u}} e^{-\Phi}) \\ + \|\bar{\omega} \alpha\|_{\Phi_t}^2 \sqrt{\bar{\omega}} dt \wedge d\bar{t}$$

とあり.

従って、曲率がゼロなる

$$\begin{cases} \sqrt{\Lambda} \bar{\partial} \bar{\partial} \Phi \wedge \hat{u} = 0 \\ \bar{\partial}_2 \alpha = 0 \end{cases}$$

となる。

以下の計算では単純のため Φ は $\text{Re } t$ にのみ依存する

$$\varphi = \Phi|_{\{t\} \times X} \quad \text{と書こう}$$

α の作り方は

$$\partial \varphi \alpha = \mathbb{P}^\perp(\dot{\varphi} u)$$

$$\Leftrightarrow \partial_2 \alpha - \partial_2 \varphi \wedge \alpha = \dot{\varphi} u + \text{holo.}$$

だから、両辺 $\bar{\partial}$ をすれば

$$\bar{\partial} \partial \varphi \wedge \alpha = \bar{\partial} \dot{\varphi} \wedge u \quad \text{on } X$$

を得る。

これは、 $\bar{\partial}_v u = -\alpha$ とおけば

時間 t に依存する Λ -ゲージ場 V は

$$\sqrt{\Lambda} \bar{\partial} \dot{\varphi} = \bar{\partial}_v \sqrt{\Lambda} \bar{\partial} \varphi$$

を満足し、つまり Hamilton Λ -ゲージ場 であることを意味する。

実際

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}_v \sqrt{\Lambda} \bar{\partial} \varphi) \wedge u &= -\sqrt{\Lambda} \bar{\partial} \partial \varphi \wedge (\bar{\partial}_v u) \\ &= +\sqrt{\Lambda} \bar{\partial} \partial \varphi \wedge \alpha = \sqrt{\Lambda} \bar{\partial} \dot{\varphi} \wedge u. \end{aligned}$$

すると

$$\sqrt{\Lambda} \bar{\partial} \partial \varphi \wedge \hat{u} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} - (\partial_2 \dot{\varphi})(v) = 0 \quad (\text{dt and } \mathbb{F} \text{ の係数を見る})$$

は

$$c(\varphi) := \ddot{\varphi} - |\bar{\partial} \dot{\varphi}|^2 = 0$$

を意味する。

Hamilton Λ -ゲージ場の方程式' を ± 3 に $\frac{\partial}{\partial t}$ すると

$$\begin{aligned} \sqrt{\Lambda} \bar{\partial}_2 \ddot{\varphi} &= \bar{\partial} \frac{\partial v}{\partial t} \sqrt{\Lambda} \bar{\partial} \varphi + \bar{\partial}_v \sqrt{\Lambda} \bar{\partial} \dot{\varphi} \\ &= \bar{\partial} \frac{\partial v}{\partial t} \sqrt{\Lambda} \bar{\partial} \varphi + \bar{\partial}_v \bar{\partial} \bar{\partial}_v (\sqrt{\Lambda} \bar{\partial} \varphi) \\ &= \bar{\partial} \frac{\partial v}{\partial t} \sqrt{\Lambda} \bar{\partial} \varphi + \bar{\partial} \underbrace{\bar{\partial}_v \bar{\partial}_v (\sqrt{\Lambda} \bar{\partial} \varphi)}_{|v|^2 = |\bar{\partial} \dot{\varphi}|^2} \end{aligned}$$

だから、

$$\sqrt{\Lambda} \bar{\partial} c(\varphi) = \bar{\partial} \frac{\partial v}{\partial t} \sqrt{\Lambda} \bar{\partial} \varphi$$

よって $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ が導かれた。

* $\int \bar{\partial} \bar{\partial} \varphi \geq 0$ のときはこの計算には多少問題がある。
(> 0 である)

この場合は、直接 $\frac{\partial \alpha}{\partial \bar{t}} = 0$ を示す。

それには、

$$\partial \varphi \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \bar{t}} \right) = \mathbb{P}^\perp (\dot{\varphi} u + \partial \dot{\varphi} \wedge \alpha)$$

$$= 0$$

に注意して、

階層 $(n, 1)$ 形式 γ に対し $H^{n,1}(L) = 0$ から

$$\bar{\partial} \beta = \mathbb{P} \gamma \quad \beta \in \gamma, \gamma$$

$$\int_X \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{t}} \wedge \gamma e^{-\varphi} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \bar{t}} \wedge \omega, \bar{\partial} \beta \right)_\varphi$$

$$= \left(\bar{\partial} \varphi \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \bar{t}} \wedge \omega \right), \beta \right)_\varphi$$

$$= \int \bar{\partial} \varphi \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \bar{t}} \right), \beta \Big|_\varphi = 0$$

と計算する。

KE 計量の一意性

$e^{-\varphi}$ を $-K_X$ の正曲率 \mathbb{P}^1 計量

→ Kähler 計量 $\in C_1(X)$
曲率

とする。今まで調べたことは、L 関数

$$L(\varphi) := -\log \int_X e^{-\varphi} \quad \leftarrow \begin{matrix} e^{-\varphi} \sqrt{dd^c \varphi} \\ \text{の略記} \end{matrix}$$

が、曲線 φ^t で $\int \bar{\partial} \bar{\partial} \varphi^t \geq 0$ をみたすもの
に沿って凸である φ^t であることを示す。

$$E(\varphi) := \frac{1}{(n+1)V} \sum_{i=0}^n \int_X (\varphi - \varphi_0) (\sqrt{\bar{\partial} \bar{\partial} \varphi})^i (\sqrt{\bar{\partial} \bar{\partial} \varphi_0})^{n-i}$$

を Aubin-満洲の L 関数 φ^t とする。
もう少し詳しく説明を
する必要がある。
 $n=1$ の Dirichlet 問題
に於て

$$L(\varphi)^\circ = \frac{\int_X \dot{\varphi} e^{-\varphi}}{\int_X e^{-\varphi}}$$

$$E(\varphi)^\circ = \frac{1}{V} \int_X \dot{\varphi} (\sqrt{\bar{\partial} \bar{\partial} \varphi})^n \quad \text{で}$$

実際 E はこの性質で (定数を除いて) 特徴づけられる。

満洲計量、曲線の Dirichlet 問題、測地線の方程式!

±3k

$$E(\varphi)'' = \frac{1}{V} \int_X c(\varphi) (\sqrt{\partial\bar{\partial}\varphi})^n$$

$$c(\varphi) = \ddot{\varphi} - |\bar{\partial}\dot{\varphi}|^2 \text{ 等}$$

曲線 $\varphi = \varphi^t$ の測地曲率を与える。

これは、 $e^{-\varphi}$ の全体を \mathcal{H} とし

$$T_{\varphi} \mathcal{H} = C^{\infty}(X; \mathbb{R})$$

であることを利用して、

$$\|u\|^2 := \frac{1}{V} \int_X u^2 (\sqrt{\partial\bar{\partial}\varphi})^n$$

よって Riemann 多様体の構造を X 上

と \mathcal{H} 上とを定める。

つまり

$L \dots$ 測地凸

$E \dots$ 測地 affine

と \mathcal{H} 上と。

曲線のエネルギー

$$\int \dot{\varphi}^2 \text{MA}(\varphi)$$

を u 方向に微分すると

測地線の方程式

$$c(\varphi) = 0 \text{ が成り立つ。}$$

KE 計量は、Ding 不等式 -

$$D(\varphi) := L(\varphi) - E(\varphi)$$

の臨界点として特徴づけられる。

$$\text{実際 } \frac{e^{-\varphi}}{\int_X e^{-\varphi}} - \frac{1}{V} (\sqrt{\partial\bar{\partial}\varphi})^n = 0$$

の $\bar{\partial}$ log をとれば $\text{Ric } \omega - \omega = 0$ とする。

仮に KE 計量 $\omega_{KE}, \omega_{KE}'$ が 2 つあると

φ_{KE} と φ_{KE}' を測地線 φ^t でつなぐ

凸性は $D(\varphi^t)$ が affine であることを導く。

すると、順像の ω の等号成る条件より

$$\omega_{KE}' = (\exp \text{Re} v)^* \omega_{KE}$$

とする正規ベクトル場 v が存在する。

* 測地線の存在は X.X. Chen

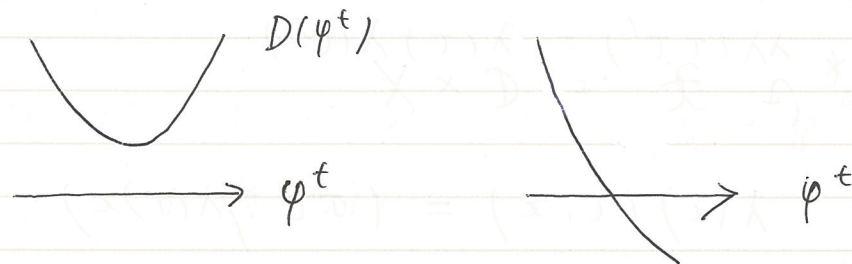
による。

ただし、これは C^2 で成り立つ!

ここに 6 枚
時間がある
測地線について
もう少し詳しくやる
(Semmes の式)

4日目

KE計量は存在するの？



$t \rightarrow \infty$ で何か起こるのか調べる必要がある。

$$\text{そのため, } \{ \text{Re } t > 0 \} \times X$$

$$\simeq (\Delta \setminus \{0\}) \times X$$

$$\tau = e^{-t}$$

と見て原点におけるファイバーを補充する。

Def (テスト配位)

$$\mathbb{C}^* \curvearrowright (\mathcal{X}, \mathcal{L})$$

$$\downarrow \pi$$

$$\mathbb{C}$$

偏極射影線の平坦族に
 π が同変になるように
 \mathbb{C}^* 作用を与えたもの。

\mathcal{X} : 正規代数多様体

$\mathcal{L} \geq 0$ \mathbb{Q} -line

s.t. $(\mathcal{X}_1, \mathcal{L}_1) \simeq (\mathcal{X}, -K_{\mathcal{X}})$

自衛的に平坦になるか

$K_{\mathcal{X}}$: \mathbb{Q} -Cartier である限り

ただし以下の二つも仮定する!!

$\mathcal{L} + -K_{\mathcal{X}/\mathbb{C}}$ も強弱。

\mathbb{Q} 係数

\mathcal{L} は \mathcal{X} の因子で

$\exists k \in \mathbb{Z}$: 直線

$$k\mathcal{L} |_{\mathcal{X}_1} \simeq k\mathcal{L}$$

例 1. 積配位.

$$\mu: \mathbb{C}^* \rightarrow \text{Aut}(X) \quad \text{準同型, 忠実}$$

$$\mathbb{C}^* \curvearrowright X := \mathbb{C} \times X.$$

$$\lambda(\sigma)(\tau, x) = (\sigma\tau, \mu(\sigma)x).$$

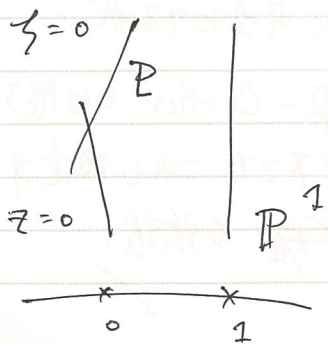
$$\mathcal{L} := p_2^*(-K_X) \quad \text{中心部分の作用は } \mu \text{ のもの.}$$

例 2. $x_0 \in X$ 忠実

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{C} \times X \quad \left[(0, x_0) \text{ を } \mathbb{P}^1 \text{ から } \mathbb{P}^1 \text{ へ } \right]$$

例 2 は \mathbb{P}^1 から $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$ へ $\tau = z = 0$ を \mathbb{P}^1 から \mathbb{P}^1 へ写すもの

$$X = \left\{ (\tau, z, \zeta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \right\} \quad \text{s.t. } \zeta z = \tau.$$



$$(\sigma\zeta)z = \sigma\tau$$

忠実, 群作用が λ である

$$\mathcal{L} := f^* p_2^*(-K_X) - \xi \cdot \mathbb{P}$$

この例は本質的に \mathbb{Q} 直線束に写す。

例 3

$$[S_1(z) : \dots : S_N(z)]$$

$-K_X$ の定数

$$X \rightarrow \mathbb{P}^{N-1} \quad \text{埋め込み}$$

$$\lambda: \mathbb{C}^* \rightarrow GL(N; \mathbb{C}) \quad \text{準同型 忠実}$$

$$X := \overline{\bigcup_{\tau \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})} (\tau, \lambda(\tau)X)} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{P}^{N-1}$$

$$\mathcal{L} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(1) \Big|_X$$

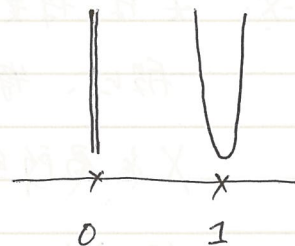
例 2 は \mathbb{P}^1 から $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$
 $z \mapsto (z, z^2)$

$$\lambda \text{ は } \begin{pmatrix} \sigma & \\ & \sigma \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{"} x^2 = y \text{"}$$

忠実 $X_2 = (x^2 = \tau y)$ の \mathbb{P}^2

X_0 は被射で写す。

(これは例 1 の X = 正規化された...)



$f^* \eta$ - 直線束,
 $-K_{X_2}$ の埋め込み

$$\mathcal{L} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\tau}\right) \Big|_X \quad \text{として}$$

実は、勝手な (X, λ) は (\mathbb{R} 直線束であること許せば)
例 3 の形式で書ける。(同変埋込定理)

その意味で、テスト配位とは

$\text{Aut}(X)$ の IRS を $GL(N)$ に拡張したもの

と思ってもよい。

しかし、内積的に定義されていることが大事。

特に、 $(\mathbb{C} \times \mathbb{P}^{n-1}$ の $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ の) FS λ の制限する \mathbb{C} で、
 $\lambda|_{\mathbb{C}}$

又は正曲率 λ を持つ。

* X は特異点を持つことに注意。

一般に、特異点を持つ多様体 X 上の関数の

X を局所的に \mathbb{C}^N に埋め込んだ上で
 の領域

領域上の滑らかな関数の制限として定義する。

これは、 X が滑らかな種の拡張定理が成り立つから。

$|I - I'| \leq C$ があるので、同じ X かつ

同じ無限遠挙動が出ている。

X は $\{\text{Re } t > 0\} \times X$

$\simeq (\Delta \setminus \{0\}) \times X$ を補充したもの

として考えているから、対応する λ の λ -計量は

$$\varphi^t(x) := \int (\bar{e}^{-t}, \lambda(e^{-t})x)$$

とするのが自然。 $t \in [0, \infty)$

一方、 $r \gg 1$ $r(K_{X/\mathbb{C}} + L)$ は Cartier である

$\xi \in (\pi_* (K_{X/\mathbb{C}} + L))_{\mathbb{C}}$ は

$$\xi \leftrightarrow s \in H^0(X_{\mathbb{C}}, r(K_{X_{\mathbb{C}}} + L_{\mathbb{C}}))$$

と対応する。簡単のため $r=1$ としよう。

そこで、

$$\|\xi\|^2 := \int_{X_{\mathbb{C}}} \sqrt{-1}^n s \wedge \bar{s} e^{-\lambda}$$

として $t \neq 0$ のとき $\pi_* (K_{X/\mathbb{C}} + L)$ の
 λ -計量を定める。

X_0 が reduced であるときは、 $t=0$ の場合では

$$\pi_* (K_{X/\mathbb{C}}^{\text{log}} + L), \quad K_{X/\mathbb{C}}^{\text{log}} = (K_X + X_{0,\text{red}}) - \pi^*(K_{\mathbb{P}^1} + [0])$$

を考慮するのが自然で、実際これは base change で不変。

ただしやはり $K_X, X_{0,\text{red}}$ は \mathbb{Q} -Cartier とする π_* で与える。

Thm (Beaudesson - Paun, Beauzon.)

$\pi_*(K_{X/C}^{\log} + L)$ の $\tau \neq 0$ の τ -計量 $\|\cdot\|$ は
半正定値曲率カレントを持ち、
 $\tau = 0$ まで一意に拡張する。

さらに、この曲率カレントが $\tau = 0$ の近傍で
恒等所にゼロで、さらに $L = -K_{X/C}$ ならば
 $X \simeq A^1 \times X$
で、 X は積配位である。

(Sketch of) proof (たぶん $\tau = 0$ と $\tau > 0$ は $L = 0$ である)

$\pi_*(K_{X/C}^{\log} + L)$ の $0 \in \mathbb{C}$ における
正則局所枠 σ をとる。

これは、 $K_{X/C}^{\log} + L$ on $\pi^{-1}(U)$ の切断 S で、
 τ で割り切れるものを見つけた。✓

$$-\log \| \sigma \|^2 \leq C$$

を示せばよい。(著論和関数に対する拡張定理。)

これは

$$\int_{X_\tau} \sqrt{-1}^n S_\tau \wedge \bar{S}_\tau e^{-\Phi_\tau} \geq \varepsilon$$

となる $\varepsilon > 0$ を見つけたい。
少なくとも2つの $P \in \mathbb{C}$ がある:

- (1) X_0 : reduced なる τ/s がある ε が与えられる
ので、この場合に (semistable reduction) 帰着する
- (2) 大沢-竹腰の拡張定理を使う ✓

後半は $\tau = 0$:

$$\exists v \text{ on } X \text{ で } \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \varphi^t = \lambda v \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \varphi^t$$

となるものがあつた。

$$F_t^t := \exp(-t \operatorname{Re} v) \quad \text{とか}$$

$$\begin{cases} (F_t^t)^* (\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \varphi^t) = (\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \varphi^0) \\ \operatorname{Im} v \text{ は } \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \varphi^t \text{ を使った} \end{cases}$$

$$\pm 3 \text{に、} (F_t^t)^* \varphi^t = \varphi^0$$

しかも v は X の 1 -PS を生成することが分かる。

$$\left(L(t) \text{ の Lelong 数 が } 0 \Rightarrow X_0 = \text{reduced} \right)$$

で $L = -K_{X/C}$

X が正則 \mathbb{A}^1 HL 場を持つならば $\tau = 0$ の議論は要らない。

正則写像 $G_\tau: X_1 \rightarrow X_\tau$ を
 $= \lambda(\tau) \cdot \rho(\tau)$ により定めると

$$G_\tau^* \Phi_\tau = \Phi_1 \quad \text{が成り立つので,}$$

$$|\Phi_1 - G_\tau^* \Phi_{FS}| \leq C.$$

これは有理写像の定義から、(Riemann 拡張定理を使う)

$$G: \Delta^* \times X \rightarrow \Delta^* \times \mathbb{P}^N$$

$$\text{が } \Delta \times X \rightarrow \Delta \times \mathbb{P}^N$$

に一表に拡張する。

$$\text{誘導射 } \Delta \times X \xrightarrow{G} X \quad \text{は}$$

• X が既約なので全射

$$G_\tau^* c_1(\mathcal{O}(1)) = c_1(-K_X) \quad \text{で } \tau \rightarrow 0 \text{ とすれば}$$

$$G_0 c_1(\mathcal{O}(1)) = c_1(-K_X). \quad -K_X \text{ の ample 性より}$$

G_0 : 有限射

• X : 正規だから Zariski 主定理により

$$G: \Delta \times X \rightarrow X \quad \text{は 正則同型.}$$

//

Thm (Berman)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D(\psi^t)}{t} = \deg \pi_* (K_X^{\log} + L) - \frac{1}{(n+1)V} \ll^{nt+1}$$

$$\text{ただし } (X, L) \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1$$

より 自明な cpt 化をとる.

//

Thm (Chen-Donaldson-Sun)

Fano 多様体 X が KE 計量を持つ

$$\Leftrightarrow D(X, L) \geq 0. \quad \text{かつ}$$

X_0 : 被約で等号が成り立つのは

$X \simeq \mathbb{C} \times X$ のときのみ.

//

Cf: Berman - Boucksom - Jonsson.

残り

- D 準安定ではない例の計算 (レポート?)
- Berman の定理の証明 (Kemp-Ness)
- 最適退化予想

5日目.

D不変量の計算、最適退化

について.

Bermanの定理の証明の次の補題による:

Lem. (singular Koebe-Ness)

ρ
 \mathbb{C}^* 同変な直線束 $F \rightarrow \Delta \subset \mathbb{C}$ と,

その上の \mathbb{S}^1 不変な特異 F 上の ρ -計量 e^{-u}
に対し

• $\mathbb{C}^* \cap F_0$ は τ^W 倍 τ^n と z になる

• $\liminf_{\tau \rightarrow 0} \frac{u}{\log |\tau|^2} = \nu \in \mathbb{R}$

とすると $\forall \epsilon \in F_1 \setminus \{0\}$ について

$$W = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \| \rho(\bar{e}^{-t}) \otimes \rho \|_u + \nu$$

が成り立つ.

proof)

$$\sigma(\tau) := \rho(\tau) \cong \text{は}$$

$F \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ の、至る所ゼロでない正則切断を定める。

さらに、

$$\tau^{-w} \cdot \sigma(\tau)$$

これは群作用ではなく
切断に左から関数を掛けたもの。

は $F \rightarrow \mathbb{C}$ 上の正則切断で、

至る所ゼロではない。

今の場合 $F \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ だから
これは簡単。

すると

$$-\log |\tau^{-w} \cdot \sigma(\tau)|_u$$

$$= w \cdot \log |\tau| - \log \|\rho(\tau) \cong\|_u$$

の左辺は mod $O(1)$ で

$$\frac{1}{2} u \sim \frac{1}{2} v \cdot \log |\tau|^2$$

に等しい。

$t = -\log |\tau|$ で両辺を割れば公式を得る。

//

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(\varphi^t)}{t} = \deg \pi_* (K_{X/\mathbb{P}^1} + \mathcal{L})$$

を示したい。

$$F \text{ とし } \pi_* (K_{X/\mathbb{P}^1} + \mathcal{L}),$$

$$u \text{ とし } L^2 \text{ 上の } \mathbb{R} \text{ 計量 } L(\tau) = -\log \int_{X_\tau} \sqrt{\tau}^2 \left(S_\tau \wedge \bar{S}_\tau e^{-\Phi_\tau} \right)$$

と η 、補題を適用する。

もし u が上下に有界なら、 $v = 0$ となる

$$\pi_* (K_{X/\mathbb{P}^1} + \mathcal{L}) \cong \mathcal{O}(d) \quad \exists d$$

$$\Rightarrow d = w : \mathbb{C}^* \curvearrowright F_0 \text{ の weight}$$

に注意すれば上の slope 公式が得られる。

$E(\varphi^t)$ についても、 F とし

$E(\varphi^t)$ が $\mathbb{R} \text{ 計量}$ とし乗ると

$$\deg F = \frac{\mathcal{L}^{n+1}}{(n+1)V}$$

を満たすものが存在する。これは \mathcal{L} の Deligne pairing

$\langle \mathcal{L} \dots \mathcal{L} \rangle$ と呼ばれるもので、これらに対しては

$n+1$ 個

重みがあることは $E(\varphi^t)$ は有界となる

ことが知られている。

さて L^2 ノルム-計量 $L(z)$ に戻ろう.

これが上に有界であることは既に見た.

しかし、一般には (重が有界でも) $L(z)$ は下に有界とは限らない.

$$\int_{X_0} S_C \wedge \overline{S_C} e^{-\Phi_C}$$

S_C が X_0 のどの方向の成分に向かっているかにも知られるからである.

これは下度 $K_{X/\mathbb{P}^1} + L$ が X_0 で自明であることに相当する.

$$D \sim_{\mathbb{Q}} -(K_{X/\mathbb{P}^1} + L), \text{ Supp } D \subset X_0$$

とある因子 D は、 X を最適化するための一意に決まる.

Berman の公式の証明は、 $\nu(L(z), 0)$ を D を用いて解析するのがポイントである.

まずこれ

$$\nu = \inf \left\{ \lambda \mid \int_{\Delta} e^{-\lambda L(z) + (1-\lambda) \log |z|^2} < +\infty \right\}$$

と書ける.

すると

$$\int_{\Delta} e^{-L(z) + (1-\lambda) \log |z|^2} = \int_{\pi^{-1}(\Delta)} \pi^* \left(e^{-(1-\lambda) \log |z|^2} \right) |s|^2 e^{-\Phi_C}$$

で、 S の零点は $D \sim_{\mathbb{Q}} -(K_{X/\mathbb{P}^1} + L)$ で決まる.

この種の 2 乗可積分性は代数幾何にかかっている.

lct (log canonical threshold) に対応する.

(このことは Demailly-Kollar に逆や、我々、 L^2 ノルム-計量と lct のつながりは (1) の仕事に起源がある.)

$$\nu(L(z), 0) = 1 - \text{lct}(X_0, D)$$

$$= -\text{deg } \pi_* (K_{X/\mathbb{P}^1}^{\log} + L)$$

if $K_X, X_{0, \text{red}}$ Cartier

で、Berman の公式はここから従う.

実は一般の Fuchsian 配位 (X, L) に対しては

$$D(X, L) := \text{lct}(X_0, D) - 1 - \frac{L^{n+1}}{(n+1)\nu}$$

と定義する必要がある.

具体的に退化について D 不変量

$$D(\pi, \mathcal{L}) = \deg \pi_* (K_{X/\mathbb{C}}^{(g)} + \mathcal{L}) - \frac{2^{n+1}}{(n+1)V}$$

を計算しよう。 もしくは ct .

例 1

$\mu: \mathbb{C}^* \rightarrow \text{Aut}(X)$ の 定まる 複配位

に対応する $D(\pi, \mathcal{L})$.

例として $X = \mathbb{P}^1$ とすると

$$\mu_d(\sigma)z = \sigma^d z \quad \text{と書ける.}$$

$\pi: \mathbb{C} \times X$ の "自明な" cpt 化は

$$(\mathbb{C} \times X) \underset{\mu_d}{\wr} \mathbb{C}^* \quad \text{と} \quad (\mathbb{C} \times X) \underset{1}{\wr} \mathbb{C}^* \quad \text{を}$$

(原点の折り) (∞点の折り)

$$(z, w) \leftrightarrow \left(\frac{1}{z}, \frac{z}{z^d}\right) \quad \text{という変換で 同値なものを}$$

つまり $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(d))$ で与えられる.

これを 用いて 計算すると、確かに

$$D(\mu_d) = 0$$

となる.

一般に φ_{KE} が "存在すれば"

$$\Phi = \mu(\tau)^* \varphi_{KE} \quad \text{on } \mathbb{C} \times X$$

と取ることで "できる" ので

$$D(\varphi^t) = at + b$$

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} D(\varphi^t) = 0$$

より、 $D(\mu) = 0$ が "成り立つ".

これは 二本の障害と呼ばれてきたものである!

$X = \mathbb{P}^2$ の 1点ブローアップ とすると、

確かに $D(\mu) \neq 0$ となる μ が "存在する".

自己同型群は $\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ という形の行列で書ける,

これを見ると どうなる μ を 求める "un" が分かる.

例 2

$$\pi \xrightarrow{f} \mathbb{C} \times X$$

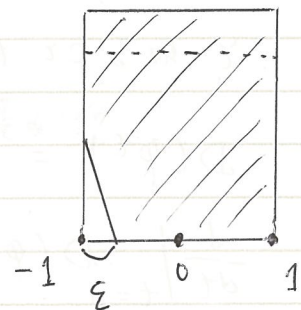
を $(0, x_0)$ での \mathbb{P}^1 - \mathbb{P}^1 として取る.

$$\mathcal{L} = f^* \mathcal{P}_2^* (-K_X) - \varepsilon \cdot E$$

たゞ、

例では $X = \mathbb{P}^1$ とする.

この π は右図の様な polytope と
して取る.



$$D(\pi, \mathcal{L}) = \varepsilon$$

とある.

一方, $X = (\mathbb{P}^2 \text{ の } 1 \text{ 点 } \mathbb{P}^1\text{-}\mathbb{P}^1)$ とし

$$\pi \xrightarrow{f} \mathbb{C} \times X \quad E: \text{例外因子}$$

を $\{0\} \times E$ とし、 \mathbb{P}^1 - \mathbb{P}^1 .

とし同様の構成を考えると、

$\varepsilon \uparrow$ threshold と $D(\pi, \mathcal{L}) < 0$ とある.

この辺りの計算は ミナト課題 ②

とある.

最後に、最適退化 について.

$\omega \in C_1(X)$ とし

$$\begin{cases} \text{Ric } \omega - \omega = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \rho \\ \int_X (e^\rho - 1) \omega^n = 0 \end{cases}$$

ここで定常関数 ρ を ω の Ricci 流の "potential" と呼ぶ.

$$D(\varphi)^0 = \int_X \varphi \left(\frac{e^{-\varphi}}{\int_X e^{-\varphi}} - \frac{1}{V} \omega_\varphi^n \right)$$

$$\omega_\varphi := \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \varphi$$

$$= \frac{1}{V} \int_X \varphi (e^\rho - 1) \omega_\varphi^n$$

$\rho = \omega_\varphi$ の Ricci 流の "potential"

と書ける.

$$R(\varphi) := \frac{1}{V} \int_X (e^\rho - 1) \omega_\varphi^n$$

を Ricci-Catali 関数 と呼ぶ.

[Calabi の問題]

$$\inf_{\omega} \int_X (e^{\rho} - 1)^2 \omega_{\varphi}^n = ?$$

"多様体の工業" -

曲線 φ^t が $\forall t \in \mathbb{R} \geq 0$ なる
 $e^{-\varphi}$ on (X, ω) から来ていた
 $\varphi^0 = \varphi$ なる

$$D(X, \omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D(\varphi^t)}{t}$$

$$\geq \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} D(\varphi^0)$$

凸性

$$= \frac{1}{V} \int_X \dot{\varphi}^0 (e^{\rho} - 1) \omega_{\varphi}^n$$

$$\geq - \left(\frac{1}{V} \int_X (e^{\rho} - 1)^2 \omega_{\varphi}^n \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{V} \int_X (\dot{\varphi}^0)^2 \omega_{\varphi}^n \right)^{\frac{1}{2}}$$

よ、

$$\left(\frac{1}{V} \int_X (e^{\rho} - 1)^2 \omega_{\varphi}^n \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{-D(X, \omega)}{\| (X, \omega) \|}$$

実は (X, ω) により決まる
 代数的不変量 $\| (X, \omega) \|$
 が決まる。

予想

$$\inf_{\omega} \left(\frac{1}{V} \int_X (e^{\rho} - 1)^2 \omega^n \right)^{\frac{1}{2}} = \max_{(X, \omega)} \frac{-D(X, \omega)}{\| (X, \omega) \|}$$

t-1, 1, 7 Fano 存在 ECU (Tao.)

Thm (Collins - H-高橋)

微分方程式 (D の 分配流!)

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi = 1 - e^{\rho}$$

の時間大域解が存在する。

X が t-1, 1, 7 Fano 存在 = max を達成する。

//

スカラー曲率による定式化は

Szekelyvidi の先行研究が大きい。

しかし、対応する Calabi flow は解ける。

予想にあたる問題もそれほど難しくなく、t-1, 1, 7 で

分かる。