問題

代数多様体 X の

$$\inf_{計量} \int_X |曲率|^2$$

を求める.

inf を達成する計量はあるか？

1日目　楕円曲線の場合.

2日目　小平の埋込定理, Kähler計量の曲率

Calabiの計算.

3日目　Kähler計量の空間

4日目　幾何学的量子化

5日目.　Kエネルギー と Donaldsonの不等式!.

これの証明を目標にする!

13:00 〜 16:10

3hずつ.

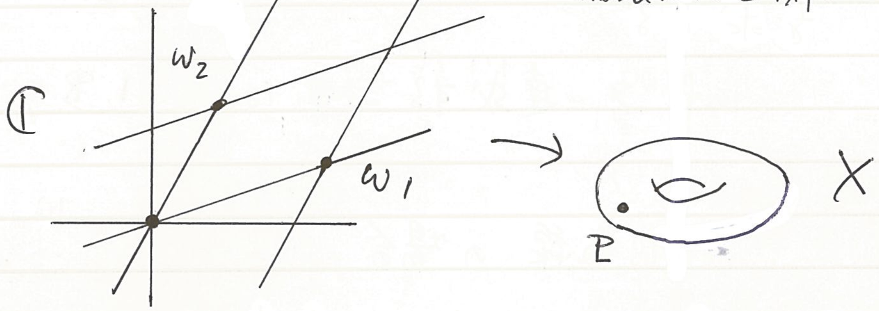
1日目

楕円曲線

$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$

$$\Lambda := \{ \omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \}$$

加法について閉じている



$\Lambda \curvearrowright \mathbb{C}$ 群作用　　$X := \mathbb{C}/\Lambda$.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (\omega, z) & \mapsto & (z+\omega) \end{array}$$

平行移動.

$\mathbb{C} \to X$ 普遍被覆.

X は 1次元 コンパクト 複素多様体 (トーラスと微分同相) となる。

それだけでなく、

原点の像 P という特別な点が付いてくる。

また、$\mathbb{C}$ の平坦な構造が X に遺伝する.

X 上の有理型関数 $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{C}$上の Λ不変な有理型関数

で、

高々Pにのみ1位の極を持つ有理型関数 … 存在しない

高々Pにのみ2位の極を持つ有理型関数 … $\wp(z)$

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

偶関数

$$\wp'(z) = \frac{\partial \wp}{\partial z}$$

奇関数

は P で丁度3位の極を持ち

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

を満たす。

$$\begin{array}{ccc} X = \mathbb{C}/\Lambda & \to & \mathbb{P}^2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [z] & \mapsto & [\wp(z) : \wp'(z) : 1] \end{array}$$

は複素多様体の埋め込みを定め、

X は $\mathbb{P}^2$ の3次曲線 $\{ [X:Y:Z] \in \mathbb{P}^2 \mid Y^2 Z = X^3 - g_2 X Z^2 - g_3 Z^3 \}$
複素射影平面

と同一視できる。

楕円曲線のモジュライ

同型なものを同一視する！

（解析的な構成）

$X = \mathbb{C}/\Lambda$ は ω_1, ω_2 でパラメトライズされる。

とくに

$\omega_1 = 1,\ \omega_2 = \tau$ $(\mathrm{Im}\,\tau > 0)$

というタイプで同型類は全て拾えていて，

さらに

$$\left.\begin{array}{lll} \tau \text{ と } \tau+1 & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \tau \text{ と } -\dfrac{1}{\tau} & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} SL(2;\mathbb{Z}) \text{ を生成}$$

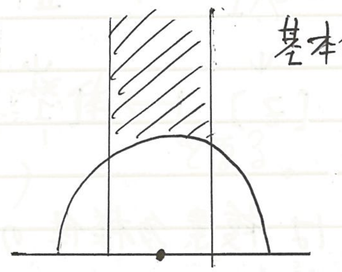
などは同型な X を定める。

複素1次元！

$$\{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,\tau > 0\} / SL(2;\mathbb{Z})$$

こうして得られる
X のパラメトリゼーションは
コンパクトではない。

基本領域



（代数的な構成）

$\mathbb{P}^3$ の3次曲線

$$f(X,Y,Z) = \sum_{\substack{i+j+k=3 \\ i,j,k \geq 0}} \xi_{ijk} X^i Y^j Z^k = 0$$

（特異点を持つかもしれない）

は，10個の係数 ξ_{ijk} でパラメトライズされている。

$\xi = (\xi_{ijk}) \in \mathbb{A}^{10}_{\xi}$

$GL(3;\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{P}^3$

$$\left(\begin{array}{ccc} GL(3;\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^3 & \to & \mathbb{P}^3 \\ (\underset{\text{行列}}{A},\ [X:Y:Z]) & \mapsto & [A_{11}X + A_{12}Y + A_{13}Z : A_{21}X + A_{22}Y + A_{23}Z : A_{31}X + A_{32}Y + A_{33}Z] \end{array}\right.$$

$$f(A_{11}X + A_{12}Y + A_{13}Z,\ A_{21}X + A_{22}Y + A_{23}Z,\ A_{31}X + A_{32}Y + A_{33}Z)$$

$$= \sum_{i+j+k=3} \xi^A_{ijk} X^i Y^j Z^k$$

によって ξ_{ijk} が ξ^A_{ijk} に移る。これは右作用

$GL(3;\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{A}^{10}_{\xi}$ を定める。

楕円曲線 X と X' が同型
$\iff$ 対応する f と f' が $GL(3)$ 作用で移り合う

X そのものを $\mathbb{P}^3$ の中で止める $GL(3)$ の元は有限個しかない。
mod $\mathbb{C}^*$ で

$\boxed{\text{困難}}$

$A^{10}_{\xi} / GL(3;\mathbb{C})$ は代数多様体にならない!

9次元

↑

（※ 特異点のある曲線も含んでいる）

例

$\mathbb{C}^*_\alpha \curvearrowright A^2$ アフィン平面 座標

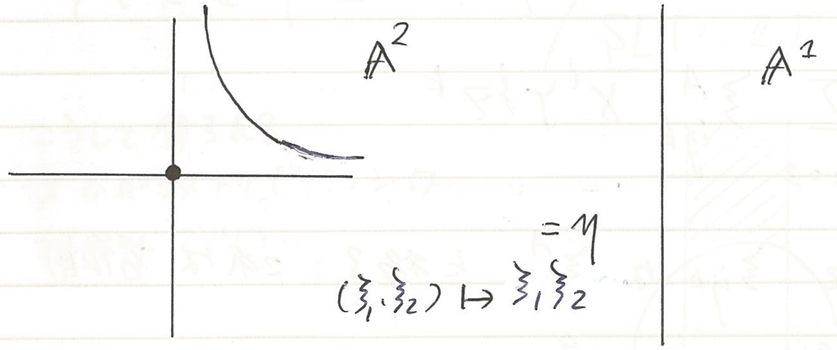
by $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\alpha \xi_1, \alpha^{-1} \xi_2)$

軌道は次の3種類に分かれる。

(1) 原点 $(0,0)$

(2) $\{\xi_1 = 0, \xi_2 \neq 0\}$ or $\{\xi_1 \neq 0, \xi_2 = 0\}$

(3) 各 $\eta \in \mathbb{C}^*$ に対する $\{\xi_1 \xi_2 = \eta\}$.



関数の空間　$\mathbb{C}[\xi_1, \xi_2]$　　$\mathbb{C}[\xi_1, \xi_2]^{\mathbb{C}^*} = \mathbb{C}[\xi_1 \xi_2]$

軌道(3)はそれぞれ異なる点に移るが、(1), (2)は全て原点に移り、分離できていない。

つまり、「群作用で不変な関数をとること」と「商空間をとること」が整合しない。

⇒ 原点を含まない閉軌道を考える限りは大丈夫。

(cf: $\mathbb{C}^* \curvearrowright A^{n+1}$ でわって $\mathbb{P}^n$ を作るとき原点を抜いたのも同じ理由.)

そこで、特に

$$\lambda : \mathbb{C}^* \to GL(3;\mathbb{C}), \quad \alpha \mapsto \begin{pmatrix} \alpha^{\lambda_1} & & \\ & \alpha^{\lambda_2} & \\ & & \alpha^{\lambda_3} \end{pmatrix}$$

という準同型を考えよう。定数倍は X を変えないから $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ としてよい。3次曲線は

$$\sum_{i+j+k=3} \xi_{ijk} X^i Y^j Z^k \mapsto \sum \underbrace{\alpha^{i\lambda_1 + j\lambda_2 + k\lambda_3} \xi_{ijk}}_{\xi^A_{ijk}} X^i Y^j Z^k$$

という風に変換される。

命題

ξの軌道が原点に近づかない

$$\Rightarrow \mu(\xi, \lambda) := -\min\{ i\lambda_1 + j\lambda_2 + k\lambda_3 \mid \xi_{ijk} \neq 0 \}$$

$$\geq 0$$ が成り立つ.

proof)

もし $\xi_{ijk} \neq 0 \Rightarrow i\lambda_1 + j\lambda_2 + k\lambda_3 > 0$ とすると

$$\sum \alpha^{i\lambda_1 + j\lambda_2 + k\lambda_3} \xi_{ijk} X^i Y^j Z^k \to 0$$

$(\alpha \to 0)$.

//

つまり、まずい軌道かどうかは

各λに対し $\mu(\xi, \lambda) \geq 0$ かどうかで判定できる.

$\forall \lambda : \mathbb{C}^* \to GL(3;\mathbb{C})$ に対し $\mu(\xi, \lambda) > 0$

となる ξ を、安定という。

例えば $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (2, -1, -1)$ のときは

$$\begin{array}{cccc}
 & X^3 & & \\
X^2Y & & X^2Z & \\
XY^2 & XYZ & XZ^2 & \\
Y^3 & Y^2Z & YZ^2 & Z^3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
 & 6 & & \\
3 & & 3 & \\
0 & 0 & 0 & \\
-3 & -3 & -3 & -3
\end{array}$$

だから、安定であれば Y^3, Y^2Z, YZ^2, Z^3 の係数は全て消える。

これは3次曲線が $X=0$ と2次曲線に分かれることと同値.

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 1, -2)$ のときは

$$\begin{array}{cccc}
 & X^3 & & \\
X^2Y & & X^2Z & \\
XY^2 & XYZ & XZ^2 & \\
Y^3 & Y^2Z & YZ^2 & Z^3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
 & 3 & & \\
3 & & 0 & \\
3 & 0 & -1 & \\
3 & 0 & -1 & -6
\end{array}$$

安定であれば XZ^2, YZ^2, Z^3 の係数は全て消える.

これは点 $[0:0:1]$ が特異点であることと同値.

(方程式を微分して確かめる.)

他のλでも同様で

定理

ξが安定 ⇔ 3次曲線が滑らか。

レポート: これを確かめよ。

代数
高次元の多様体では

安定 $\Leftrightarrow$ X が $\int_X |\text{曲率}|^2$ 最小の計量を持つ

となると予想されている.

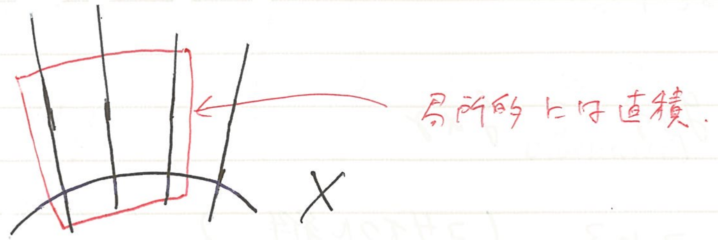
(Yau - Tian - Donaldson 予想)

明日は、高次元で右辺をどう定式化するか話す。

2日目

正則直線束

複素多様体 X の各点に
1次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間を並べたもの



定義

正則写像

$$\pi : L \to X$$

1) π は全射で, $\forall x \in X$ に対し
ファイバー $\pi^{-1}(x)$ は 1次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間

2) $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ 開被覆 で

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "f_\alpha", "\sim"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_\alpha \times \mathbb{C} \arrow[dl, "p_1"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

を可換にし、各ファイバーの同型を与える f_α
が存在する.

$$f_\alpha \circ f_\beta^{-1}(z,w) = (z, g_{\alpha\beta}(z)w)$$

によって $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}^*$ (正則関数!)

を定義すると、

$$g_{\alpha\beta}\, g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$$

が成り立っている。(コサイクル条件。)

逆にこのような $g_{\alpha\beta}$ から正則直線束が復元できる。

自明な直線束が一番簡単な例。$L = \mathcal{O}$.

例1

射影空間 $\mathbb{P}^n$ $= (\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\})/\mathbb{C}^*$ の各点に、

対応する $\mathbb{A}^{n+1}$ の原点を通る直線を並べたい。

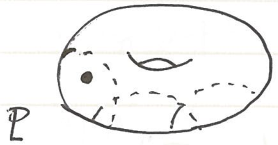
$$L := \{((s_1,\cdots,s_{n+1}),[X_1,\cdots,X_{n+1}]) \in \mathbb{A}^{n+1}\times\mathbb{P}^n \mid s_\alpha X_\beta = s_\beta X_\alpha\}_{1\le\alpha,\beta\le n+1}$$

$\pi : L \to \mathbb{P}^n$ 射影

$U_\alpha = \{X_\alpha \neq 0\}$ 上で局所自明化が与えられる。

$g_{\alpha\beta} = X_\alpha / X_\beta$ とする。　これを $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ と書く。

例2



開被覆 U_α

$U_\alpha \ni P$ となる α が1つしかない

ようにとる。

$$g_{\alpha\beta}(z) := \begin{cases} z^k & U_\alpha \ni P \\ 1/z^k & U_\beta \ni P \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

for $\alpha \neq \beta$

これを $\mathcal{O}(kP)$ と書く。

例3

直線束 L に対し、

各ファイバーが $(L_x)^{\otimes k}$ となるような

直線束 $L^{\otimes k} \to X$ が自然に作れる。

これを L を k 回テンソルした直線束という。

例えば $g_{\alpha\beta}^k$ を変換関数に持つ直線束として構成できる。

上の $\mathcal{O}(kP)$ は $\mathcal{O}(P)$ の k 回テンソルである。

同様に、各ファイバーが $L_x^\vee$ となるような直線束 $L^\vee$ が

$g_{\alpha\beta}^{-1}$ から作れる。

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ の双対を $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ と書く。

定義

正則写像 $s: X \to L$ で

$$\pi \circ s = id_X$$

となるものを、Lの正則切断という.

$L = \mathcal{O}$ のときは これは X上の 正則関数に他ならない.

切断とは、つまり"ねじれた"正則関数である. 実際

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "f_\alpha", "\sim"'] & & U_\alpha \times \mathbb{C} \\ & U_\alpha \arrow[ul, "s_\alpha"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$z \mapsto (z, s_\alpha(z))$$

として、局所的に定義された正則関数 s_α を得る.

この s_α は

$$s_\alpha = g_{\alpha\beta}\, s_\beta \quad \text{on } U_\alpha \cap U_\beta$$

をみたす.

逆にこの条件をみたす s_α on U_α は Lの切断を定める.

U_α: 局所座標近傍 $z_\alpha^1, \cdots, z_\alpha^n$

$$\det\left(\frac{\partial z_\alpha^i}{\partial z_\beta^j}\right)_{i,j=1}^n$$

! K_Xを導入する →

例1

1次斉次式

$$\xi_1 X_1 + \cdots + \xi_{n+1} X_{n+1}$$

は、

$$s_\alpha := \frac{\xi_1 X_1 + \cdots + \xi_{n+1} X_{n+1}}{X_\alpha}$$

とおくと $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ の正則切断を定める.

同様に、k次斉次式

$$\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{n+1}=k} \xi_{i_1\cdots i_{n+1}} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_{n+1}^{i_{n+1}}$$

は、k回テンソル $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ の切断.

実は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ の正則切断は このようなものしかない

(Serre)

例2

Weierstrass の $\wp$関数に対し

$$s_\alpha := \begin{cases} z^3 \wp & U_\alpha \ni P \\ \wp & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくと、これは $\mathcal{O}(3P)$ の切断を定める.

同様に、$\wp'$ は $\mathcal{O}(3P)$ の切断を定める.

実は $\mathcal{O}(3P)$ の切断は $\wp, \wp', 1$ の定めるこのような切断の1次結合に限る.

定理

X が cpt 複素多様体 なら、
勝手な 正則直線束 $L \to X$ に対し

正則切断 の集合

$H^0(X, L)$ は 有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間になる.

//

基底
$s_1, \cdots, s_N \in H^0(X, L)$ をとると、

(*) $s_1, \cdots, s_N$ が 共通零点を持たない ならば

正則写像
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^{N-1} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & [s_1(x) : s_2(x) : \cdots : s_N(x)] \end{array}$$

が定まる。 $f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(1) = L$ となっている。

これが、楕円曲線 が 3次曲線 として 表せた ということ の
一般化 である！

基底の取り換えは $\mathbb{P}^{N-1}$ の 一次変換 で表せるので
どの 基底をとるか は 本質的でない.

この 正則 写像が 埋め込み になる L の条件を与えるのが
小平の埋込定理 である.

ここから 2日目にする方がいいかも…

直線束の ファイバー計量

各ファイバーの ベクトルに 長さを 与える

もし、L の各ファイバーで ベクトルの長さが与えられているとすると

$$\pi^{-1}(U_\alpha) \underset{\sim}{\xrightarrow{f_\alpha}} \begin{array}{c} U_\alpha \times \mathbb{C} \\ \rotatebox{90}{$\in$} \\ (z, w) \end{array}$$

によって、

$f_\alpha^{-1}(z, w)$ の長さ が 決まる. それを

$= \underbrace{h_\alpha(z)}_{>0} \cdot |w|^2$ と 書くと $h_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}_{>0}$ は

$$h_\alpha = \frac{h_\beta}{|g_{\alpha\beta}|^2} \quad \text{on } U_\alpha \cap U_\beta$$

を満たす。

このような h_α たちのことを、L の ファイバー計量 と呼ぶ.

各 $v \in L_x$ に対し、v の長さ

$h(v) = h_\alpha \cdot |w|^2$ は α に依らず定まっている.

定義

$-\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial} \log h_\alpha$ は α に依らず、

X 上の 実 $(1,1)$ 形式 を定める。

これを ファイバー計量の **曲率** という。

実際、

$$-\sqrt{-1}\partial\bar\partial \log h_\alpha - (-\sqrt{-1}\partial\bar\partial \log h_\beta)$$
$$= \sqrt{-1}\partial\bar\partial \log |g_{\alpha\beta}|^2$$
$$= \sqrt{-1}\partial\bar\partial (\log g_{\alpha\beta} + \log \overline{g_{\alpha\beta}})$$
$$= 0.$$

$g_{\alpha\beta} \neq 0$ なので、各点の近傍では log の分枝がとれる.

Xの正則 実(1,1)形式は局所座標を用いて

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

s.t. $A_{i\bar{j}}$ は Hermite 行列に値を持つ関数

と書ける.

このとき、$A_{i\bar{j}}$ が正定値であるという条件は正則局所座標 z_i のとり方に依らない.

定理 (小平)

L のファイバー計量で曲率が正定値になるようなものが存在すれば、

$k \gg 1$ に対し

$f_{L^{\otimes k}} : X \to \mathbb{P}^{N_k - 1}$ は埋め込みを定める。

例1

$L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ のファイバー計量として

$$h_\alpha := \frac{|X_\alpha|^2}{|X_1|^2 + \cdots + |X_n|^2}$$

というものがとれる.

例えば $n=1$ だと、曲率は

$$\sqrt{-1}\partial\bar\partial \log (1+|z|^2).$$
$$= \sqrt{-1}\partial \frac{z\, d\bar{z}}{(1+|z|^2)} = \frac{\sqrt{-1}\, dz \wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2} > 0$$

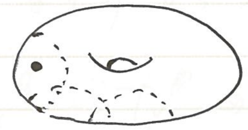
一般の n でも正定値になる.

もし $f_L : X \to \mathbb{P}^{N-1}$ が埋め込みなら、

$f_L^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(1) = L$ より、この h_α は

L のファイバー計量で曲率が正定値なものを定める。

例2 P



具体的に計量を作るのは難しい？

$$h_\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{|z|^2} & U_\alpha \ni P \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

としたいところだが、これは P で ∞ になってしまう.

このようにして $\mathbb{P}^{N_k-1}$ に埋め込まれた X は
実は 斉次多項式たちの共通零点 になり、
代数多様体 の構造を持つ (Chow の定理).

そこで以下は特に断られない限り

X: cpt 複素多様体
L: 正定値な曲率を持つ直線束

$\Big\}$ 実は代数的

とする.

楕円曲線の場合の話の高次元化をするなら
この設定が自然だからである.

Kähler 計量

一般に、X 上の実 $(1,1)$ 形式

$$\omega = \sqrt{-1}\, g_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

で、 1) $g_{i\bar{j}}$ が各点で正定値、かつ

2) $d\omega = 0$ 　ここ補題は3回目？

となるものを X の Kähler 計量という。

これを X の計量と呼ぶ理由は、
ω が 正則接束 $T_X^{(1,0)}$ の Hermite ファイバー計量を

$$h\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right) = g_{i\bar{j}}$$

によって与えるからである。

Riemann計量 $g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ on $T_X^{\mathbb{R}}$

で J 不変なものからスタートすると

これは $T_X^{\mathbb{C}} = T_X^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ 上の $\mathbb{C}$ 双線形形式 $g^{\mathbb{C}}$ に
$= T_X^{(1,0)} \oplus T_X^{(0,1)}$ 拡張し、

差役がつく

$$h\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) := 2\cdot g^{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right)$$

は $T_X^{(1,0)}$ の Hermite ファイバー計量を定める。

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial y^i}\right) \text{ より}$$

$$h\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}\right) = \frac{1}{2}g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) + \frac{1}{2}g\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right)$$

そろっている場合

が成り立っているので、

$g_{ij} = \delta_{ij}$ ならば $g_{i\bar{j}} = \delta_{ij}$ となる。

※ $\sqrt{-1}\, dz \wedge d\bar{z} = 2\, dx \wedge dy$ である。

$\omega^n = \det(g_{i\bar{j}}) \sqrt{-1}\, dz^i \wedge d\bar{z}^i$ が体積要素になる。

g_{ij} に対する Riemann 接続、及びその $T_X^{\mathbb{C}}$ への

$\mathbb{C}$ 線形拡張を $\nabla : A^0(T_X^{\mathbb{C}}) \to A^1(T_X^{\mathbb{C}})$ と書くと

定理

$d\omega = 0$ の条件より

$$\left.\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} &=: \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i}} \frac{\partial}{\partial z^j} &= A_{ij}^k \frac{\partial}{\partial z^k} \end{aligned}\right\} \quad \text{と書いたとき} \quad A_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$$

すなわち、∇ は $T_X^{1,0}$ の Chern 接続と一致する。

$$d\, h\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) = h\left(\nabla \frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) + h\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \nabla \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right)$$

の (0,1) part をとると

$$\bar{\partial} g_{i\bar{j}} = \cancel{h\left(\nabla^{(0,1)} \frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right)} + h\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \nabla^{(1,0)} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right)$$

$\nabla^{(0,1)} = \bar{\partial}$ より

より

$$\partial_{\bar{l}}\, g_{i\bar{j}} = g_{i\bar{k}} \overline{A_{lj}^k}$$

$$\Leftrightarrow \quad A_{ij}^k = g^{l\bar{k}} \partial_i g_{l\bar{j}}$$

$\partial_i g_{j\bar{l}} = \partial_j g_{i\bar{l}}$ だから torsion free が出る。

$$= g^{k\bar{l}} \partial_i g_{j\bar{l}} \qquad \cdots (A)$$

$$A = (A_{ij}^k\, dz^i)_{k,j}$$

各行 (1,0) 形式に値をとる行列を接続形式という。

定義

曲率テンソルをベクトル場 X, Y, Z に対して

$$R(X,Y)Z := (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z$$

と定義すると、これは 2 形式に値をとる行列で

$$\begin{aligned} &= \nabla_X(A(Y)Z) - \nabla_Y(A(X)Z) - A([X,Y])Z \\ &= (X A(Y))Z + A(Y)A(X)Z - (Y A(X))Z - A(X)A(Y)Z \\ &\qquad - A([X,Y])Z \\ &= (dA + A \wedge A)(Z) \end{aligned}$$

が成り立つ。

今の場合、A が $(1,0)$ 形式で

R は実曲率だから $(1,1)$ 形式

従って

$$R = dA = \bar{\partial} A \quad \text{である。}$$

R を $R_{\alpha\bar{\beta}}{}^{i}{}_{j}\, dz^{\alpha} \wedge d\bar{z}^{\beta}$ と書けば

$$= \bar{\partial}\left(A_{\alpha}{}^{i}{}_{j}\, dz^{\alpha} \right)$$

$$= \partial_{\bar{\beta}}\left(g^{i\bar{k}} \partial_{\alpha} g_{j\bar{k}} \right) d\bar{z}^{\beta} \wedge dz^{\alpha}$$

$$= -\partial_{\bar{\beta}} A_{\alpha}{}^{i}{}_{j}\, dz^{\alpha} \wedge d\bar{z}^{\beta}$$

$$R_{\alpha\bar{\beta}}{}^{i}{}_{j} = -\partial_{\bar{\beta}}\, g^{i\bar{l}} \partial_{\alpha} g_{j\bar{l}} \qquad \cdots\cdots (R)$$

を得る。

Riemann 曲率テンソルを

$R(X,Y,Z,W) := g\left(R(X,Y)Z, W \right)$ と定義すると

その成分は

$$R_{\alpha\bar{\beta} i\bar{j}} = g_{k\bar{j}} R_{\alpha\bar{\beta}}{}^{k}{}_{i} \qquad \cdots (R')$$

$$= -\partial_{\alpha}\partial_{\bar{\beta}} g_{i\bar{j}} + g^{k\bar{l}} (\partial_{\alpha} g_{i\bar{l}})(\partial_{\bar{\beta}} g_{k\bar{j}})$$

と書ける。

トーラスの場合

$\mathbb{C}$ の微分形式 $\sqrt{-1}\, dz \wedge d\bar{z}$ が Λ 不変だから

$X = \mathbb{C}/\Lambda$ に落ちて、

局所座標で書いたとき $g_{i\bar{j}} \equiv 1$ となる Kähler 計量

を定める。

このときは (R) も (R') も恒等的にゼロ(平坦)である。

命題

(1) $R_{\alpha\bar{\beta} i\bar{j}} = \overline{R_{\beta\bar{\alpha} j\bar{i}}}$

(2) $R_{\alpha\bar{\beta} i\bar{j}} = R_{i\bar{\beta}\alpha\bar{j}} = R_{\alpha\bar{j} i\bar{\beta}}$ (1st Bianchi)

(3) $\nabla_{\gamma} R_{\alpha\bar{\beta} i\bar{j}} = \nabla_{\alpha} R_{\gamma\bar{\beta} i\bar{j}}$ (2nd Bianchi)

これらは Riemann 接続の持つ性質である。

//

$T^{(1,0)}_{X,x}$ の勝手な1次元 $\mathbb{C}$ 部分空間と

その正規直交基底 X, Y に対し

正則断面曲率 $R(X,Y,Y,X)$ が一定となるような

(X,ω) の組は

$\mathbb{P}^n_{\omega_{FS}}$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{B}^n_{\omega_P}$ しかないことが知られている。

もっと簡約化された曲率の形式としては

$$R_{\alpha\bar\beta} = g^{i\bar j} R_{\alpha\bar\beta i\bar j}$$
$$= -\partial_\alpha \partial_{\bar\beta} \log \det(g_{i\bar j})$$

がある。(1,1)形式

$$Ric(\omega) = R_{\alpha\bar\beta}\sqrt{-1}\, dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta \text{ の } \frac{1}{2\pi} \text{倍}$$

を ω の Ricci 曲率形式という。

例えば、$\mathbb{P}^3$ の(滑らかな)4次曲面は
トーラスと
$Ric \equiv 0$ となる計量を持つことが知られている。
(Yau) 70年代.

さらに、

$$\rho_\omega := g^{\alpha\bar\beta} R_{\alpha\bar\beta}$$

を ω のスカラー曲率という。

$$Ric\,\omega \in c_1(K_X^\vee)$$
$$\hat\rho = -n\frac{K_X L^{n-1}}{L^n}.$$

Calabiの計算

1950年代、E. Calabi は
複素多様体 X の標準的な Kähler 計量として

$$\int_X |\text{曲率}|^2$$

を最小とするようなものの存在を問うた。

① $\nabla R \equiv 0$
という考え方もあるが、これは分類されている
(E. Cartan)

② cf: Dirichlet 問題

正確には、ω の定めるコホモロジー類

$$[\omega] \in H^2(X;\mathbb{R})$$

を固定して ω を色々動かす。

例えば ω が $L \to X$ の正定値曲率として与えられている
なら、$[\omega] = c_1(L)$ である。$c_1(L^{\otimes k}) = k\cdot c_1(L)$で、

$$\omega = \frac{1}{k} f_{L^{\otimes k}}^* \omega_{FS} \qquad f_{L^{\otimes k}} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^{N_k - 1}$$

の場合を考えれば、確かに、同じコホモロジー類 $c_1(L)$ の中に
異なる Kähler 計量がたくさん入っていることが分かる。

つまり $\left[\frac{1}{k}\sqrt{-1}\partial\bar\partial \log(|s_1|^2 + \cdots + |s_{N_k}|^2)\right] = c_1(L).$

補題（$\partial\bar{\partial}$ 補題）

1) α が d-閉な実 $(1,1)$ 形式ならば

局所的に

$\alpha = \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\varphi$　　凸関数との類似

と書ける。

2) α が cpt Kähler 多様体上の

d-完全な実 $(1,1)$ 形式ならば

大域的に

$\alpha = \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\varphi$

と書ける。

proof)

1) $\alpha = d\beta$ と局所的に書ける。

$\beta = \beta^{(1,0)} + \beta^{(0,1)}$ と分解すると

$\bar{\partial}\beta^{(0,1)} = 0$, $\overline{\beta^{(1,0)}} = \beta^{(0,1)}$ より

$\beta^{(0,1)} = \bar{\partial} f$ と書ける。

$\varphi = \dfrac{f - \bar{f}}{2\sqrt{-1}}$ とすればよい。

2) ω を X 上の Kähler 計量とする。

$\alpha = d\beta$ と大域的に書く。

$\beta^{(0,1)} = \bar{\partial}\gamma$ となる γ が大域的に取れないので困る。

そこで、Poisson 方程式

$\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\varphi \wedge \omega^{n-1} = \alpha \wedge \omega^{n-1}$

を解く。

$\displaystyle\int_X \alpha\wedge\omega^{n-1} = \int_X d(\beta\wedge\omega^{n-1}) = 0$

なのでこれは解ける。

$\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\varphi = \alpha \iff d\Big(\underbrace{\big(\tfrac{\partial-\bar{\partial}}{2\sqrt{-1}}\big)\varphi - \beta}_{\gamma\text{ とおく}}\Big) = 0$

を示したい。

$\displaystyle\int_X \langle d\gamma, d\gamma\rangle_\omega\, dV_\omega = \int_X \langle \gamma, d^* d\gamma\rangle_\omega\, dV_\omega$

より $d^* d\gamma = 0$ を言えばよい。

(1) を用いて
局所的に

$d\gamma = \sqrt{-1}\partial\bar\partial\psi$ と書いて、

$\sqrt{-1}\partial\bar\partial\psi \wedge \omega^{n-1} = 0 \iff d^*d\psi = 0$

から $d^*d\gamma = 0$ を示す。

$$d^*d\gamma = d^*dd^c\psi$$
$$= -d^*d^cd\psi$$
$$= d^cd^*d\psi = 0$$

レポート？

//

とくに

$\omega' = \omega + \sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi$ 　　$\varphi \in C^\infty(X;\mathbb{R})$
定数差を除いて一意.

と書けることが分かる.

$\omega_t = \omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi_t$

なら $\dot\omega_t = \sqrt{-1}\partial\bar\partial\dot\varphi_t$

で、Kähler 計量の変分は

$u = \dot\varphi \in C^\infty(X;\mathbb{R})$ と見なせる.

$\delta\omega^n = \Delta u \cdot \omega^n$ も分かる.

ここでは $\int_X S^2\omega^n$ の変分を考えよう.

（Calabi は $\int_X |Ric|^2$ や $\int_X |Riem|^2$ の
変分も計算している. 実はこれらの差は ω に依らない.
（$[\omega]$ だけで決まる.））

まず

$S = -g^{i\bar j}\partial_i\partial_{\bar j}\log\det(g)$ （の定数倍） だから

$$\delta S = -g^{i\bar j}\partial_i\partial_{\bar j}(g^{k\bar l}\delta g_{k\bar l}) - (\delta g^{i\bar j})\partial_i\partial_{\bar j}\log\det(g)$$

ここで

$0 = \delta(g^{k\bar j}g_{i\bar j}) = (\delta g^{k\bar j})g_{i\bar j} + g^{k\bar j}\partial_i\partial_{\bar j}u$

$\iff \delta g^{i\bar j} = -g^{k\bar j}g^{i\bar l}\partial_k\partial_{\bar l}u$

より

$$\delta S = -\Delta^2 u - g^{i\bar l}g^{k\bar j}(\partial_k\partial_{\bar l}u)R_{i\bar j}$$

を得る.

すると、

$$\delta \int_X \rho^2 \omega^n$$

$$= \int_X \left[-2\rho\,(\Delta^2 u + R^{i\bar{j}} \partial_i \partial_{\bar{j}} u) + \rho^2 \Delta u \right] \omega^n$$

$$= \int_X u \left[-2\Delta^2 \rho - 2\nabla_i \nabla_{\bar{j}} (R^{i\bar{j}} \rho) + \Delta \rho^2 \right] \omega^n$$

ここで

$$\nabla_{\bar{j}} R^{i\bar{j}} = \nabla_{\bar{j}} g^{i\bar{\ell}} g^{k\bar{j}} R_{k\bar{\ell}}$$

$$= \nabla_{\bar{j}} g^{i\bar{j}} g^{k\bar{\ell}} R_{k\bar{\ell}} \quad \text{(2nd Bianchi}$$

$$= g^{i\bar{j}} \nabla_{\bar{j}} \rho$$

より、

$$= \int_X u \Big[-2\Delta^2 \rho - 2\nabla_i \big(\rho g^{i\bar{j}} \nabla_{\bar{j}} \rho + R^{i\bar{j}} \nabla_{\bar{j}} \rho \big)$$

キャンセル

$$+ \Delta \rho^2 \Big] \omega^n$$

$$= \int_X u \left[-2\Delta^2 \rho - 2\nabla_i (R^{i\bar{j}} \nabla_{\bar{j}} \rho) \right] \omega^n$$

従って、極小点では

$$\Delta^2 \rho + \nabla_i (R^{i\bar{j}} \nabla_{\bar{j}} \rho) = 0$$

が成り立つ.

勝手な関数 f に対し

$$\Delta^2 f + \nabla_i (R^{i\bar{j}} \nabla_{\bar{j}} f)$$

$$= g^{i\bar{j}} g^{k\bar{\ell}} \nabla_i \nabla_{\bar{j}} \nabla_k \nabla_{\bar{\ell}} f + \nabla_i (R^{i\bar{j}} \nabla_{\bar{j}} f)$$

$$= g^{i\bar{j}} g^{k\bar{\ell}} \nabla_i \nabla_k \nabla_{\bar{j}} \nabla_{\bar{\ell}} f - g^{i\bar{j}} g^{k\bar{\ell}} \nabla_i (R_{k\bar{j}\bar{\ell}}{}^{\bar{m}} \nabla_{\bar{m}} f)$$

キャンセル.

$$+ \nabla_i (R^{i\bar{j}} \nabla_{\bar{j}} f)$$

$$= g^{i\bar{j}} g^{k\bar{\ell}} \nabla_k \nabla_i \nabla_{\bar{j}} \nabla_{\bar{\ell}} f$$

そこで

$$\mathcal{D} : C^\infty(X; \mathbb{C}) \to C^\infty(T_X^{(0,1)} \otimes T_X^{(0,1)})$$

を

$$f \longmapsto \nabla_{\bar{j}} \nabla_{\bar{\ell}} f$$

によって定めれば

$$= \mathcal{D}^* \mathcal{D} f$$

と書ける。これを Lichnerowicz 作用素という。

極小点では $\mathcal{D}^* \mathcal{D} \rho = 0$ なので、特に

$$0 = \int_X \rho\,(\mathcal{D}^* \mathcal{D} \rho)\, \omega^n = \int_X |\mathcal{D} \rho|^2 \omega^n$$

つまり $\nabla_{\bar{j}} \nabla_{\bar{\ell}} \rho = 0$ が成り立つ.

$T_X^{0,1} \underset{\text{by } \omega}{\simeq} T_X^{1,0}$ を用いれば

$$Df = \nabla_{\bar{j}} (\underbrace{g^{k\bar{l}} \nabla_{\bar{l}} f}_{T_X^{1,0} \text{ と見ている. } f \text{ の}\overset{(1,0)}{\text{勾配}}\text{ベクトル}})$$

$$= \bar{\partial} (g^{k\bar{l}} \nabla_{\bar{l}} f)$$

と書ける。

まとめると

<u>定理</u> (Calabi)

ω が $\int_X S^2 \omega^n$ の臨界点

$\iff$ $\mathrm{grad}^{(1,0)} S$ が正則.

"extremal K計量"

Calabiは第2変分も計算していて、

このような計量が $\int_X S^2 \omega^n$ の極小点で、

しかも $\delta\omega = L_v \omega$ ${}^\exists v$: 正則ベクトル場

である限り 停留しないことを示している.

ベクトル場 $g^{k\bar{l}} \nabla_{\bar{l}} f$ が正則

$\iff$ ${}^\exists v$: 正則ベクトル場 s.t $\sqrt{-1}\,\bar{\partial} f = i_v \omega$

が成り立つ. このような f を正則Hamilton関数という.

$f = h_v$ と書く.

※ 勝手な正則ベクトル場がこのような f を持つわけではない.

実は,

v が ${}^\forall\omega$ について 正則Hamilton関数を持つ

$\iff$ v が $L \to X$ に持ちあがる

が成り立つ.

正則ベクトル場がゼロしかない X に対しては,

極小点 $\iff$ $S = \hat{S}$

が成り立つ. これを cscK計量という。

さらに $L = \pm K_X$ or $K_X \equiv 0$ のときは

Kähler-Einstein計量と呼ばれるものと同値になる。

これは $\int_X (S - \hat{S})^2 \omega^n$ を明らかに最小にする.

cscK や KE の方が簡単なのでこっちを考えることが多い。

定理 (二木 1987~, Lichnerowicz)

$$F(v) := -\int_X h_v (S-\hat{S})\,\omega^n$$

は ω の取り方に依らない。

proof)

$$\delta h_v = v^i \partial_i u = g^{i\bar{j}} \partial_{\bar{j}} h_v \partial_i u$$

$$\begin{aligned}
\delta S &= -\Delta^2 u - R^{i\bar{j}} \partial_i \partial_{\bar{j}} u \\
&= -D^*Du + \nabla_i (R^{i\bar{j}} \nabla_{\bar{j}} u) - R^{i\bar{j}} \nabla_i \nabla_{\bar{j}} u \\
&= -D^*Du + \underline{g^{i\bar{j}} \nabla_i S}\, \nabla_{\bar{j}} u
\end{aligned}$$

(2nd Bianchi)

$$= -\overline{D^*Du} + g^{i\bar{j}} \nabla_i u \nabla_{\bar{j}} S$$

(共役をとった。)

より、

$$\begin{aligned}
\delta F &= \int_X \Big[-g^{i\bar{j}} (\partial_{\bar{j}} h)(\partial_i u)(S-\hat{S}) \\
&\qquad + h\,(\overline{D^*Du} - g^{i\bar{j}} \nabla_i u \nabla_{\bar{j}} S) \\
&\qquad - h\,(S-\hat{S})\Delta u \Big]\, \omega^n \\
&= \int_X h\, \overline{(D^*Du)}\, \omega^n \\
&= \int_X u\, (D^*Dh)\, \omega^n = 0.
\end{aligned}$$

cscK があれば $\forall v\ F(v) = 0$

なので、この不変量は障害になっている。実はこれは

Atiyah-Bott の同変指数定理 (1984) に表れる不変量である。

例えば $\mathbb{C}^* \overset{\lambda}{\curvearrowright} (X, L)$ のとき、λ の生成元を v

$$\mathbb{C}^* \overset{\lambda}{\curvearrowright} H^0(X, L^{\otimes k}) = \bigoplus_{i=1}^{N_k} \mathbb{C}\, s_i$$

s.t. $\lambda(\alpha) s_i = \alpha^{\lambda_i} s_i$ とすれば

$$\frac{\sum \lambda_i}{k N_k} = -\frac{1}{L^n} \int_X h_v\, \omega^n + \frac{1}{k} \int_X h_v (S-\hat{S})\, \omega^n + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

が成り立つ。

これを用いて実際に $F(v)$ を計算することで、

cscK の存在しない (あるいは extremal K の存在しない)

(X, L) の例を与えることができる。

($X = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ toric Fano 3-fold blow-up of $\mathbb{P}(1,1,1,2)$)

このような不変量を一般化することで、

(X, L) の <u>K安定性</u> が定義されるのである。

(Tian, Donaldson, 00年代)

Kähler計量の成す空間.

X : コンパクト複素多様体

$L \to X$: 正則直線束 s.t.

$f_{L^{\otimes k}} : X \to \mathbb{P}^{N_k - 1}$ は埋込

(ample line bundle)

とする.

復習 L のファイバー計量 h_0 で、曲率

$$\omega = -\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\log h_\alpha.$$

が正定値なものが(たくさん)存在する.

逆に Kähler計量 $\omega' \in c_1(L)$ をとると、

$$\omega' = \omega + \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\varphi \qquad \varphi \in C^\infty(X;\mathbb{R})$$

と書け、φ は定数差を除いて一意.

$$h' = h \cdot e^{-\varphi}$$

すなわち $h'(s) = h(s)e^{-\varphi} = h_\alpha(z)|s_\alpha(z)|^2 e^{-\varphi(z)}$

は L のファイバー計量で、その曲率は ω' と一致する.

定義 $\omega_0 \in c_1(L)$ を固定して、Kähler計量の空間を

$$\mathcal{H} := \left\{ \varphi \in C^\infty(X;\mathbb{R}) \;\middle|\; \omega = \omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi > 0 \right\}$$

と定義する。

$$Q(\varphi) := \int_X |S_{\omega_\varphi} - \hat{S}|^2 \omega_\varphi^n$$

は $Q : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ である。

これを Calabi 汎関数 と呼ぶ。

$\mathcal{H}$ を無限次元の(実)多様体と思いたい。

(無限次元多様体の定義は必要としない。)

Fréchet 多様体らしい. Banachでなない!

前回やったことから、

$$T_\varphi \mathcal{H} = C^\infty(X;\mathbb{R})$$

$$\delta\varphi = u$$

と思える。我々にとってはこれだけで十分である。

定義(滑測)

$u \in C^\infty(X;\mathbb{R})$ に対し

$$\|u\|^2 := \int_X u^2 \omega_\varphi^n$$

とおくことで、$\mathcal{H}$ に "Riemann計量" を入れる。

この計量に関する測地線を計算しよう。

φ_0 と φ_1 をつなぐ測地線 φ_t は、エネルギー

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_X \dot\varphi_t^2 \omega_{\varphi_t}^n \right) dt$$

の臨界点として得られるはずである。$\varphi_{t,s}$ の s 微分を u_t とおくと、Euler-Lagrange 方程式は

$$0 = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_X \left[2\dot\varphi_t \dot u_t + \dot\varphi_t^2 (\Delta u_t) \right] \omega_{\varphi_t}^n \, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_X u_t \left(-2\ddot\varphi_t - 2\dot\varphi_t \Delta\dot\varphi_t + \Delta\dot\varphi_t^2 \right) \omega_{\varphi_t}^n \, dt$$

$$= -\int_0^1 \int_X u_t \left(\ddot\varphi_t - |\bar\partial\dot\varphi_t|^2_{\omega_{\varphi_t}} \right) \omega_{\varphi_t}^n \, dt$$

以上より、測地線の方程式は

$$\ddot\varphi_t - |\bar\partial\dot\varphi^t|^2_{\omega_{\varphi_t}} = 0$$

となる。

曲線 φ_t に沿ったベクトル場 u_t の共変微分を

$$\nabla_{\dot{\varphi}_t} u_t := \dot{u}_t - \langle \bar\partial u_t, \bar\partial \dot{\varphi}_t \rangle_{\omega_{\varphi_t}}$$

と定義することは自然である。(T_{ij}^k は $g_{i\bar j}$ の逆行列を含むのでうまく書けない。)

上の計算より、測地曲率は

$$c(\varphi_t) := \ddot{\varphi}_t - |\bar\partial \dot{\varphi}_t|^2_{\omega_{\varphi_t}}$$

で与えられる。

これはさらに次のように変形できる：

定理 (Semmes '92)

複素変数 τ を導入し、

$\Delta^* \times X$ 上の関数 Φ を

$$\Phi(\tau, z) := \varphi_{-\log|\tau|}(z)$$

(曲線 $\varphi_t,\ t \geq 0$)

と定める。

また、ω_0 の $\Delta^* \times X$ への引き戻しを Ω_0 とおく。

$$\Omega_\Phi := \Omega_0 + \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial_{\tau,z} \Phi$$

は $\Delta^* \times X$ 上の $(1,1)$ 形式。)

このとき、

$$(\Omega_0 + \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\Phi)^{n+1} = \frac{n+1}{4|\tau|^2} c(\varphi_t)\, \omega_{\varphi_t}^n \wedge \sqrt{-1}\, d\tau \wedge d\bar\tau .$$

が成り立つ。

//

$n=1$ のときだけ計算してみよう。

$$\Omega_0 + \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial_{\tau,z}\Phi = \Omega_0 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z \partial \bar z}\sqrt{-1}\, dz \wedge d\bar z$$
$$+ \frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau\partial\bar z}\sqrt{-1}\, d\tau \wedge d\bar z + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial\bar\tau}\sqrt{-1}\, dz \wedge d\bar\tau + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau\partial\bar\tau}\sqrt{-1}\, d\tau \wedge d\bar\tau$$

より、

$$(\Omega_\Phi)^2 = \cancel{p_2^* \omega_\varphi^2} + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau\partial\bar\tau}\omega_\varphi \wedge d\tau \wedge d\bar\tau$$
$$2\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial\bar\tau}\right)\sqrt{-1}\, dz \wedge d\bar z \wedge d\tau \wedge d\bar\tau$$

あとは

$$\frac{\partial t}{\partial\tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}(-\log|\tau|^2) = \frac{1}{2}\frac{-\bar\tau}{|\tau|^2}$$

に注意すればよい。

//

特に測地線の方程式は、

退化型 Monge-Ampère 方程式

$$(\Omega_0 + \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial_{\tau,z}\Phi)^{n+1} \equiv 0 \quad \text{on } \Delta^* \times X$$

に翻訳される。

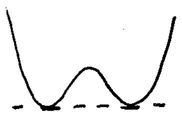
($n=0$ ならこれは Laplace 方程式 $\Delta u = 0$ であることに注意せよ。)

このような方程式は 複素ポテンシャル論で
大切で、よく調べられている。

とくに $\{e^{-1}<|t|<1\}\times X$ に制限すれば
φ^0 と φ^1 をつなぐ測地線として
$C^{1,1}$ 級のものが一意的に存在することが知られている。

$$\Phi = \sup\left\{\Psi : C^\infty\text{関数 on } \{e^{-1}<|t|<1\}\times X \ \text{ s.t. } \Omega_\Psi > 0,\ \psi^0\le\varphi^0,\ \psi^1\le\varphi^1\right\}$$

(境界まで連続)



さらに曲率を計算してみよう。

2-パラメータ族 $\varphi=\varphi(t,s)$ と
それに沿ったベクトル場 $u=u(t,s)$ を考えると、
曲率は

$$R_\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t},\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)u := \left(\nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial s}} - \nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}\right)u$$

で与えられる。

$$\nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial t}} u = \frac{\partial u}{\partial t} - \left\langle \bar\partial u, \bar\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right\rangle$$

であった。

定理

$$R_\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t},\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)u = -\frac{1}{4}\left\{\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t},\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right\},u\right\}$$

が成り立つ。$\{\ ,\ \}$ は ω_φ に関する Poisson 括弧。

$$\left(\begin{array}{l}\{f,g\} = \omega(X_f, X_g) \\ \text{where}\quad df = i_{X_f}\omega.\end{array}\right)$$

たぶん証明は省略する。レポート？

$$\nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial s}} u$$

$$= \nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial t}} \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \langle \bar\partial u , \bar\partial \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right) \rangle \right)$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial s} - \langle \bar\partial\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right), \bar\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \rangle$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} \langle \bar\partial u , \bar\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\rangle$$

$$+ \langle \bar\partial \langle \bar\partial u , \bar\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\rangle , \bar\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \bar\partial u , \bar\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\rangle$$

$$= \langle \bar\partial\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right), \bar\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\rangle + \langle \bar\partial u , \bar\partial\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial s}\right)\rangle$$

$$+ \sqrt{-1}\, \partial\bar\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \left(\mathrm{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right), J\,\mathrm{grad}\, u \right)$$

※ $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$

$J\,\mathrm{grad}\,u$ は $(i_{J\mathrm{grad}u}\,\omega)(X) = \omega(X, J\,\mathrm{grad}\,u)$

$= g(X, \mathrm{grad}\,u)$

$= du$

より Hamilton 関数。さらに

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

$$\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \left(\mathrm{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right), J\,\mathrm{grad}\,u \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ \mathrm{Hess}_{\frac{\partial\varphi}{\partial t}} \left(\mathrm{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right), \mathrm{grad}\,u \right) + \mathrm{Hess}_{\frac{\partial\varphi}{\partial t}} \left(J\,\mathrm{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right), J\,\mathrm{grad}\,u \right) \right.$$

さらに

$$\mathrm{Hess}_{\frac{\partial\varphi}{\partial t}} \left(J\,\mathrm{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right), J\,\mathrm{grad}\,u \right)$$

$$= \omega_\varphi \left(\nabla_{X_{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}} X_{\frac{\partial\varphi}{\partial s}} , X_u \right)$$

一方

$$\langle \bar\partial \langle \bar\partial u , \bar\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\rangle , \bar\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \rangle$$

$$= \frac{1}{4} \mathrm{Hess}_{\frac{\partial\varphi}{\partial s}} \left(\mathrm{grad}\,u , \mathrm{grad}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)$$

だから、結局

$$\left(\nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial s}} - \nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial t}} \right) u$$

$$= \frac{1}{4} \left[\omega_\varphi \left(\nabla_{X_{\frac{\partial\varphi}{\partial s}}} X_{\frac{\partial\varphi}{\partial t}} , X_u \right) - \omega \left(\nabla_{X_{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}} X_{\frac{\partial\varphi}{\partial s}} , X_u \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \omega_\varphi \left([X_{\frac{\partial\varphi}{\partial s}} , X_{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}] , X_u \right)$$

$$= \frac{1}{4} \omega_\varphi \left(X_{\{\frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\}} , X_u \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\} , u \right\}$$

//

K

これは H が、ω の Hamilton 微分同相群 について

"dual symm space"

$$H = K^{\mathbb{C}}/K$$

なっていることを意味する。

有限次元でいうと、

$$GL(n;\mathbb{C})/U(n)$$

が典型的な例である。

($K^{\mathbb{C}} = G$ のような形の G を簡約群という。)

早ければ　3日目の前半

遅くても　3日目の最後でここまで来たい。

ここから 4日目 →

対称空間

定義　Riemann多様体 (M, g)

$\forall p \in M$ に対し等長変換 $\sigma_p : M \to M$ で

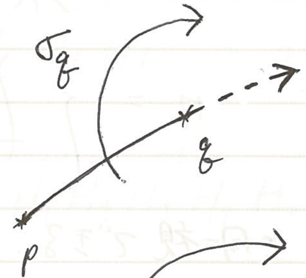
※向きを保たない

1) $\sigma_p^2 = -\mathrm{id}_M$

2) p は σ_p の孤立固定点　※唯1の固定点でなくてよい

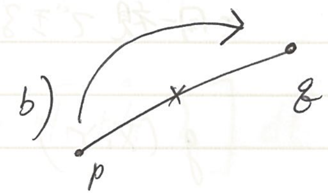
となるものが存在するときをいう。

対称空間は次の性質を持つ。



a) (M, g) は完備。

b) (M, g) は等質



c) 普遍被覆 $(\tilde{M}, g)$ も対称空間で、

単連結，完備，$\nabla R \equiv 0$ という条件で特徴づけられる。

Meyers-Steenrod の定理から、$\mathrm{Iso}(M, g)$ は Lie群。

※向きを保つ

また、1点の固定化群 K は cpt.

σ は G に共役で作用

よって b) より

$$M = G/K \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \cdot\ G_0^{\sigma} \subset K \subset G^{\sigma} \\ \cdot\ \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(K) \subset GL(\mathfrak{g}) \text{ は cpt subgp} \end{cases}$$

と書ける。

このような (G, K, σ) を対称対という.
対称対からは容易に対称空間が構成できる.
(自然に)

例 $G = GL(2;\mathbb{C})$ 　　$N \geq 1$.
より一般に $GL(\ ;\mathbb{C})$ でOK
$K = U(2)$

$\sigma(A) = {}^t\bar{A}^{-1}$

とすると, 極分解より $G/K = \{ H : \mathbb{C}^2$ 上の 正定値 Hermite内積 $\}$ で,

$M = G/K$ の接空間は

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b+\sqrt{-1}c \\ b-\sqrt{-1}c & a \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$= X$ Hermite行列!

と同一視できる. 実3次元!

$g(X, Y) := +\frac{1}{2} \mathrm{Tr}\, XY$ 　　$X, Y \in \mathfrak{m}$.

は $\mathrm{Ad}(K)$ 不変な内積を与える. $\rightsquigarrow$ G不変な Riemann 計量.

これは断面曲率が -1 で一定で,

$R_0(X, Y)Z = -[[X, Y], Z]$

$X, Y, Z \in \mathfrak{m}$

をみたしている. (後者は一般の対称対で成立する.)

/

$(\exp tX) \cdot o$ が M の測地線を与えることを示そう.

曲線 H_t のエネルギーは 　　対称空間の一般論でも分かるが...

$$\frac{1}{2}\int_0^1 g_0(H_t^{-1}\dot{H}_t, H_t^{-1}\dot{H}_t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^1 \mathrm{Tr}\,(H_t^{-1}\dot{H}_t)^2\,dt$$

より, Euler-Lagrange 方程式は 　　$(A^{-1})^{\cdot} = -A^{-1}\dot{A}A^{-1}$.

$$0 = \int_0^1 2\mathrm{Tr}\left[H_t^{-1}\dot{X} H_t^{-1}\dot{H}_t - H_t^{-1}XH_t^{-1}\dot{H}_t H_t^{-1}\dot{H}_t \right] dt$$

$$= -2\int_0^1 \mathrm{Tr}\, X\left[(H_t^{-1}\dot{H}_t H_t^{-1})^{\cdot} + H_t^{-1}\dot{H}_t H_t^{-1}\dot{H}_t H_t^{-1} \right] dt$$

$$= -2\int_0^1 \mathrm{Tr}\left[H_t^{-1}X \cdot H_t^{-1}(\ddot{H}_t - \dot{H}_t H_t^{-1}\dot{H}_t) \right] dt.$$

つまり
測地線の方程式は

$$(H_t^{-1}\dot{H}_t)^{\cdot} = H_t^{-1}\ddot{H}_t - H_t^{-1}\dot{H}_t H_t^{-1}\dot{H}_t = 0$$

$\Leftrightarrow \dot{H}_t = XH_t$

$\Leftrightarrow H_t = (\exp tX) H_0$

と書ける。

$$X = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix} U^{-1}.$$

と基底変換すると、

$$\exp tX = U \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_N t} \end{pmatrix} U^{-1}$$

より、適当な基底をとれば

$$H_t = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_N t} \end{pmatrix} H_0$$

と書ける。

言い換えると、ある基底 $s_1, \cdots, s_N$ があって

$\left\{ e^{\frac{\lambda_i}{2} t} s_i \right\}_{i=1}^{N}$ が ONB for $H_t H_0^{-1}$.

となる。

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$　$A^2(\Omega)$ … 2乗可積分正則関数

$B(z, w) := \sum_{i=1}^{\infty} f_i(z) \overline{f_i(w)}$

$\Omega \times \Omega$ 上の関数.

$f(z) = \int_X B(z, w) f(w)$　再生核.

$f = \sum_i \langle f, f_i \rangle f_i$

$B(z) = B(z, z)$

$= \sup_{\|f\| = 1} |f(z)|$

$e_z(f) = \langle B(z, \cdot), f \rangle$

$e_z : A^2(\Omega) \to \mathbb{C}$

$f \mapsto f(z)$

有限次元近似 $\mathcal{H}_k$.

再び (X, L) に戻る.

各 $k \geq 1$ に対し

$$\mathcal{H}_k := \{ H : \text{正定値 Hermite 内積 on } H^0(X, L^{\otimes k}) \}$$

とおく.

$H^0(X, K_X \otimes L^{\otimes k})$ とする流儀もある.

これは対称空間なのだった。

$f_k : \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}$ を

$$H \mapsto \frac{1}{k} \log \sum_{i=1}^{N_k} |s_i|_0^2$$

$|s|_0^2 = h_0^{\otimes k}(s, s)$

$\omega_0 = -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial} \log h_0$

s_i : ONB　Bergman 計量 アイバー.

と定める.

$$\omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\left(\frac{1}{k} \log \sum_{i=1}^{N_k} |s_i|_0^2 \right)$$

$$= \frac{1}{k} \sqrt{-1}\partial\bar{\partial} \log \sum_{i=1}^{N_k} |s_i|^2 = \frac{1}{k} f_{L^{\otimes k}}^{*} \omega_{FS}$$

基底の情報が入ってる.

より、たしかに入っている.

$\mathcal{H}_k$ が $\mathcal{H}$ を近似していることを見よう。

$P_k : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_k$ を

$$\varphi \mapsto H(s) = \int_X |s|_0^2 e^{-k\varphi} \omega_\varphi^n$$

と定義する.

定理1 (Fefferman, Tian, Zelditch, Catlin, Boutet de Monvel)

$$\varphi_k := f_k \circ p_k(\varphi) \to \varphi \quad \text{in } C^\infty(X;\mathbb{R})$$

が成り立つ.

より正確には, $\varphi \in \mathcal{H}$ に対し

ONB $\{s_i\} \subset H^0(X, L^{\otimes k})$

for $\int_X |s|_0^2 e^{-k\varphi} \omega_\varphi^n$

をとると

$$\sum_{i=1}^{N_k} |s_i(z)|_0^2 e^{-k\varphi} = a_n(z) k^n + a_{n-1}(z) k^{n-1} + \cdots$$

が

$$\left\| \sum_{i=1}^{N_k} |s_i(z)|_0^2 e^{-k\varphi} - \sum_{n-r \le j \le n} a_j(z) k^j \right\| \le C(r,m) \cdot k^{n-r-1}.$$

の意味で成り立つ. さらに

$$a_n(z) = 1/n!$$

$$a_{n-1}(z) = S_\omega / 2n! \qquad (\text{Lu.})$$

この定理の証明はとても難しく,

残念ながら紹介することはできない。左の漸近展開は,

$$N_k = \dim H^0(X, L^{\otimes k})$$

$$= \frac{L^n}{n!}k^n + \frac{(-K_X)L^{n-1}}{2(n-1)!}k^{n-1} + O(k^{n-2})$$

(Hilbert多項式)

の "計量版" と呼ぶことができる.

cf: Weylの公式

測地線については次が成り立つ.

定理2 (Phong-Sturm '06, see also Berndtsson '09)

φ_t を φ_0 と φ_1 をつなぐ唯1つの $C^{1,1}$ 級測地線とすると

$H_{k\varphi_0} = p_k(\varphi_0)$ と $H_{k\varphi_1} = p_k(\varphi_1)$ をつなぐ

唯1つの測地線 H_t を

$\exists s_i \in H^0(X, L^{\otimes k})$ で

$$H_t H_0^{-1} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_{N_k} t} \end{pmatrix}$$ と表現したとき

$$\varphi_t = \limsup_{k\to\infty}{}^{*} \frac{1}{k} \log \sum_{i=1}^{N_k} e^{2\lambda_i t} |s_i|^2$$

が成り立つ。

ところで

<u>幾何学的量子化</u> とは

$f \in C^\infty(X;\mathbb{R})$ に対し，Hermite 作用素

$$T_f^{(k)} : H^0(X, L^{\otimes k}) \to H^0(X, L^{\otimes k})$$

を

$$H_{k\varphi}(T_f^{(k)} s, s') = H_{k\varphi}(f s, s')$$

と定義する．

$$T_k^{(k)} = P_k(f\cdot)$$

であり，$P_k : C^\infty(X, L^{\otimes k}) \to H^0(X, L^{\otimes k})$

は L^2 直交射影．

先の定理1より

$$[\underbrace{T_f^{(k)}, T_g^{(k)}}_{\text{量子}}] = \underbrace{\frac{1}{k}}_{\text{プランク定数}} \underbrace{T_{\{f,g\}}}_{\substack{\text{古典力学} \\ \text{w.r.t } \omega_\varphi}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

が成り立つ．

さて，定理2の H_t をベクトル束のファイバー計量と思いたい．

改めて

$$\mathcal{H}_k = \{ H : \overset{\text{正定値}}{\text{Hermite 内積}} \text{ on } H^0(X, \underbrace{K_X}_{\substack{dz^1\wedge\cdots\wedge dz^n \\ \text{local section}}} \otimes L^{\otimes k}) \}$$

とする．

$$\begin{array}{cccc} f_k : & \mathcal{H}_k & \to & \mathcal{H} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & H & \mapsto & \dfrac{1}{k} \log \sum |s_i|_0^2 \Big/ dz\wedge d\bar{z} \end{array}$$

$(\sqrt{-1})^n dz^1\wedge\cdots\wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge\cdots\wedge d\bar{z}^n$

$$\begin{array}{cccc} P_k : & \mathcal{H} & \to & \mathcal{H}_k \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \varphi & \mapsto & H(s) = \displaystyle\int_X (\sqrt{-1})^n h_0(s,s) e^{-k\varphi} \end{array}$$

体積がなくても積分できる！
φ が singular なとき利点となる．

とおく．

定理1，定理2は殆ど変更なく同様に成り立つ．

$A := \{ e^{-1} < |\tau| < 1 \}$ として，

A 上の $\overset{\text{(自明な)}}{\text{正則}}$ ベクトル束を

$$E_k := A \times H^0(X, K_X \otimes L^{\otimes k}) \to A$$

によって定義する．

Kähler計量

$$\Omega_\Phi \in c_1(p_2^* L)$$

が与えられると, E_k のファイバー計量が

$$H_{k\Phi,\tau}(s) := \int_X \sqrt{-1}^n h_0(s,s)\, e^{-k\varphi_t}$$

$$t = -\log|\tau|$$

によって定まる.

これは、直線束 $\det E_k$ にファイバー計量 $\det H_{k\Phi}$ を導く.

その曲率は

$$-\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial_\tau \log \det H_{k\Phi}$$

とする. 次の定理は小平消滅定理の発展型である。 $K_X\otimes L^{\otimes k}$.

定理 (Berndtsson '09 "subharmonicity of B核")

$\Omega_\Phi \geq 0$ なら

$$-\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial_\tau \log\det H_{k\Phi} \geq 0.$$

$\Omega_\Phi \geq 0$ 半正にできているのは大切である.
実際、この定理から大沢-竹腰の L^2 拡張定理が出てくる.

実は (Φ が C^∞ なら) det をとらなくても、precise に

$$\langle(-\sqrt{-1}\,\bar\partial_\tau H_{k\Phi}^{-1}\partial_\tau H_{k\Phi})s, s\rangle \geq k\langle c(\varphi_t)s, s\rangle = k\langle T^{(k)}_{c(\varphi_t)} s, s\rangle$$

が成り立つ.
左辺の( )の中身は量子化された測地曲率に他ならない!
実は漸近的には等号が成立する (Bermanの解説を見よ.)

$$\mathcal{L}_k(\varphi_t) := -\log\det H_{k\Phi}$$

を (Donaldson の) L関数と呼ぶ.
これが $\mathcal{H}$ の上で測地凸な汎関数を定めていることが分かった!

1階微分を計算すると $(\log\det A)^\bullet = \mathrm{Tr}\, A^{-1}\dot{A}$ より

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathcal{L}_k(\varphi_t) = \sum_{i=1}^{N_k}\int_X k\dot{\varphi}_0 \sqrt{-1}^n h_0(s,s)e^{-k\varphi_0}$$

$$= k\int_X \dot{\varphi}_0\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N_k}\sqrt{-1}^n h_0(s,s)e^{-k\varphi_0}\right)}_{\text{Bergman核}}$$

これに定理1 ($K_X\otimes L^{\otimes k}$版) を適用すれば

$$\frac{1}{kN_k}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathcal{L}_k(\varphi_t)$$

$$= \frac{1}{L^n}\int_X \dot{\varphi}_0\,\omega_{\varphi_0}^n$$

二木不変量!

$$-\frac{1}{k}\frac{n!}{2}\frac{1}{L^n}\int_X \dot{\varphi}_0\,(S_{\varphi_0}-\hat{S})\,\omega_{\varphi_0}^n \;+\; O\!\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

を得る. 実は 原始関数 がとれて,

$$\frac{1}{kN_k}\mathcal{L}(\varphi)$$

$$= \frac{1}{L^n}E(\varphi)$$

$$+\frac{1}{k}\frac{n!}{2}M(\varphi) + O\!\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

をみたす $E, M : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ が存在する.

この形から

E は 測地凸 (実はさらに測地 affine)

M は 測地凸

であることが従う.

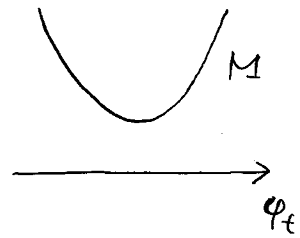
より明示的には次のように定義できる:

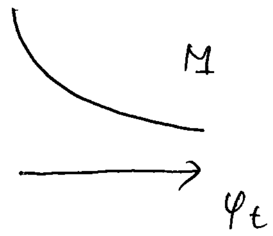
$$E(\varphi) = \frac{1}{(n+1)}\sum_{i=0}^{n}\int_X \varphi\,\omega_\varphi^i\wedge\omega_0^{n-i}.$$

$$R(\varphi) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}\int_X \varphi\,Ric(\omega_0)\wedge\omega_\varphi^i\wedge\omega_0^{n-i-1}$$

$$M(\varphi) = \frac{1}{2}\int_X \log\frac{\omega_\varphi^n}{\omega_0^n}\,\omega_\varphi^n + R(\varphi) + \hat{S}E(\varphi)$$

$$\left(n\cdot\frac{-K_X L^{n-1}}{L^n}\right)$$





臨界点 = cscK

cscK計量の一意性も言及する…？
の証明

lower bound of the Calabi functional

定義（テスト配位）

直線束を伴う射影的スキームの族

$$\begin{array}{c}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \\ \pi \downarrow \\ \mathbb{P}^1\end{array}$$

に次のデータを与えたものをテスト配位という.

1) $\mathbb{C}^*$ の作用 $\mathbb{C}^* \curvearrowright (\mathcal{X}, \mathcal{L})$ で π が同変的になるもの

2) $\pi^{-1}(\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}) \simeq (\mathbb{A}^1 \times X, p_2^* L)$

$\mathcal{X}$ は通常 normal variety と仮定する.（$\mathcal{X}_0$ は very singular.）

今回は $\mathcal{X}$: $\mathbb{Q}$-Gorenstein も仮定しておく.

初回で 楕円曲線 $\leftrightarrow$ 3次曲線 の $\lambda : \mathbb{C}^* \to GL(3;\mathbb{C})$ に沿った退化を調べたが,

これはその一般化になっている.

$\mathcal{L}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ の制限。また、$\{\infty\}$ を加えている.

先までは $A = \{e^{-1} < |t| < 1\}$ に対し

$A \times X$ 上の $p_2^* L$（と Ω_0 +歪双正）

を考えていた。

テスト配位では, A が伸びていって原点に到達している.

$\mathcal{L}|_{\pi^{-1}(\Delta)}$ 上のファイバー計量 η が与えられると

$$h_t(v) := \eta(\lambda(e^{-t})v) \quad \forall v \in L_x$$

により L のファイバー計量 h_t が定まり, η が正曲率なら

$$h_t = h_0 e^{-\varphi_t}$$

と書くことにより, $\varphi_t \in \mathcal{H}$ が定まる.

※ $\Omega^{n+1} \equiv 0$ なる測地線 が定まる.［Phong–Sturm の構成］

先と同様に, $(\pi_* K_{\mathcal{X}} \otimes \mathcal{L}^{\otimes k})|_{\Delta \setminus \{0\}}$ 上の

ファイバー計量

$$H_{\eta \otimes k}(s) := \int_X \Omega^n h_0(s,s) e^{-k\varphi_t}$$

$$t = -\log|t|$$

が定まり, $\det \pi_*(K_{\mathcal{X}} \otimes \mathcal{L}^{\otimes k})$ は正曲率となる.

$$\frac{1}{kN_k}\mathcal{L}(\varphi) = E(\varphi) + \frac{n!}{2}\frac{1}{k}M(\varphi) + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

に相当する直線束の分解が次のように成り立つ:

$$\frac{\det \pi_*(K_{\mathcal{X}}\otimes\mathcal{L}^{\otimes k})}{kN_k}$$

$\mathbb{P}^1$上の$\mathbb{Q}$直線束の公式.

$$= \frac{\langle \mathcal{L}\cdots\mathcal{L}\rangle}{(n+1)V}$$

"RR公式を逆手に L^n を定義する" で$\langle \mathcal{L}\cdots\mathcal{L}\rangle$を定義することもできる.

$$+ \frac{1}{k}\frac{n!}{2}\left(\frac{\langle K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1},\mathcal{L}\cdots\mathcal{L}\rangle}{V} + \hat{S}\,\frac{\langle \mathcal{L}\cdots\mathcal{L}\rangle}{(n+1)V}\right)$$

$$+ O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

deg をとると

$$\frac{\deg \det \pi_*(K_{\mathcal{X}}\otimes\mathcal{L}^{\otimes k})}{kN_k} = \frac{\mathcal{L}^{n+1}}{(n+1)V} + \frac{1}{k}\cdot\underbrace{\frac{n!}{2}\left(\frac{K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1}\mathcal{L}^n}{V} + \hat{S}\,\frac{\mathcal{L}^{n+1}}{(n+1)V}\right)}_{DF(\mathcal{X},\mathcal{L})} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

が成り立つ.

これを Donaldson－二木不変量という.

さらに $\mathcal{L}(\varphi_t)$, (φ_t), (φ_t) … は

それぞれの直線束のファイバー計量（のウェイト関数）を定める.

定理 (Donaldson '05)

$\forall \omega \in c_1(L)$, $\forall (\mathcal{X},\mathcal{L})$

$$\left(\int_X (S-\hat{S})^2\omega^n\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{-DF(\mathcal{X},\mathcal{L})}{\|(\mathcal{X},\mathcal{L})\|}.$$

（証明のアイデア）

測地線

$$DF(\mathcal{X},\mathcal{L}) \text{``}=\text{''} \lim_{t\to\infty}\frac{M(\varphi_t)}{t}$$

$$\geq \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} M(\varphi_t)$$

$$= -\int_X \dot{\varphi}_0 (S-\hat{S})\omega^n$$

$$\geq -\left(\int_X (S-\hat{S})^2\omega^n\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\left(\int_X \dot{\varphi}_0^2\,\omega^n\right)^{\frac{1}{2}}}_{=\|(\mathcal{X},\mathcal{L})\|}$$

実際は最初の等号が難しいので,

$$\frac{\det \pi_*(K_{\mathcal{X}}\otimes\mathcal{L}^{\otimes k})}{N_k} - k\frac{\langle \mathcal{L}\cdots\mathcal{L}\rangle}{(n+1)V} \text{ の deg}$$

$$\underset{\text{Kemp-Ness}}{\geq} \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\mathcal{L}_k(\varphi_t)}{N_k} - kE(\varphi_t)\right)\Big/ t$$

を示し, $k\to\infty$ とする. //

Kemp - Ness

$F \to \Delta \subset \mathbb{C}$ $\mathbb{C}^*$ 同変直線束

e^{-u} S^1 不変な特異計量 s.t. $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u \geq 0$

さらに u は $0 \in \Delta$ の外で局所有界

とし、Lelong 数を $\nu(u,0)$ と書く.

すると勝手な F の切断 s に対し

$$\mathrm{weight}(\mathbb{C}^* \overset{\rho}{\curvearrowright} F_0)$$

$$= -\lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt} \log |\rho(e^{-t}) s|_u^2 + \nu(u,0).$$

なお、

$F \to \mathbb{P}^1$ が $\mathbb{C}^*$ 同変直線束なら、右辺が自明でない限り

$$\deg F = \mathrm{weight}(\mathbb{C}^* \curvearrowright F_0)$$

が成り立つ.

測地線の構成

時間が余れば議論する.

(中心極限定理との関係なども面白い)