等周不等式 その 2

1　復習

定理 1.1 (等周定理)**.** 平面内の滑らかな曲線で囲まれた領域 Ω を考える。Ω の面積を A、周の長さを L とすると、不等式

$$4\pi A \leqslant L^2$$

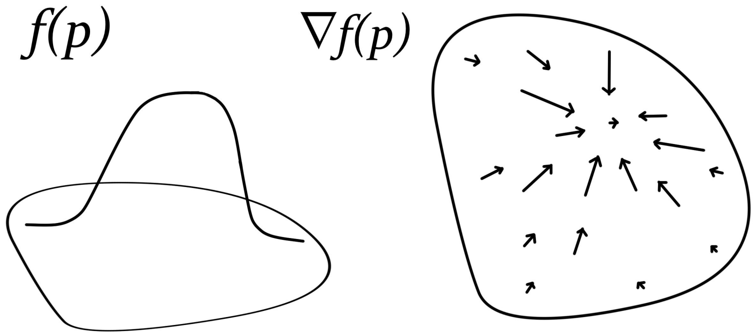
が成り立つ。さらに、この不等式の等号が成り立つとき、Ω は円盤に一致する。

前回は、三角形や四角形の場合から始めて、等周定理がなぜ成り立つのか考えた。今回は等周定理のやや高級な言い換えについて紹介する。

2　Sobolev の不等式

Ω を平面内の滑らかな曲線で囲まれた領域とし、Ω 上の滑らかな関数 f で、境界の近くではゼロになっているようなものを考える。

図 1



点 p における x 軸方向の傾きを $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$、$y$ 軸方向の傾きを $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$ と書く。これらの組が定めるベクトル $\nabla f := (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ は関数 f の増え方を表している。

各点における f の大きさと f の増え方には関係がないが、f のグラフは滑らかに繋がっているから、全体として見れば「山が大きいほど勾配もそれなりにある」と考えられる。これを表したものが次の定理である。

定理 2.1 (Sobolev の不等式)**.** Ω を平面内の滑らかな曲線で囲まれた領域、f を Ω 上の滑らかな関数で境界付近でゼロになっているものとすると

$$4\pi\int_\Omega f^2 \leqslant \left(\int_\Omega |\nabla f|\right)^2$$

が成り立つ。

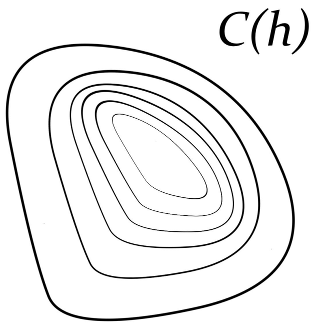
※普通は (Sobolev の不等式といえば) ある定数 C があって

$$\int_\Omega f^2 \leqslant C\left(\int_\Omega |\nabla f|\right)^2$$

となることだけを主張する。定数 C を最良に取ったものが上の定理である。

証明. 次のように、f の等高線を描く。

図 2



高さ h を表す等高線 $C(h)$ に囲まれた領域を $\Omega(h)$ とすると

$$\begin{aligned}\int_\Omega f^2 dxdy &= \int_\Omega \left[\int_0^{|f(x,y)|} 2hdh\right]dxdy = \int_0^\infty 2h\left[\int_{h\leqslant|f(x,y)|} dxdy\right]dh \\ &= \int_0^\infty 2hA(h)dh\end{aligned}$$

と表すことができる。さらに、$A(h)$ は減少関数なので

$$
\begin{aligned}
&h\sqrt{A(h)} \leqslant \int_0^h \sqrt{A(x)}dx \\
&hA(h) \leqslant \sqrt{A(h)}\int_0^h \sqrt{A(x)}dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dh}\left(\int_0^h \sqrt{A(x)}dx\right)^2, \\
&\int_0^\infty 2hA(h)dh \leqslant \left(\int_0^\infty \sqrt{A(h)}dh\right)^2.
\end{aligned}
$$

一方、$C(h)$ の弧長パラメータを s、直交する方向のパラメータを t とすると、$C(h)$ 上では

$$|\nabla f| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| = \frac{dh}{dt}$$

が成り立つ。従って、

$$\int_\Omega |\nabla f|\, dxdy = \int_0^\infty \int_{C(h)} \frac{dh}{dt} dsdt = \int_0^\infty L(h)dh$$

と表すことができる。

つまり、等周不等式を各 $\Omega(h)$ に適用すれば結論を得る。

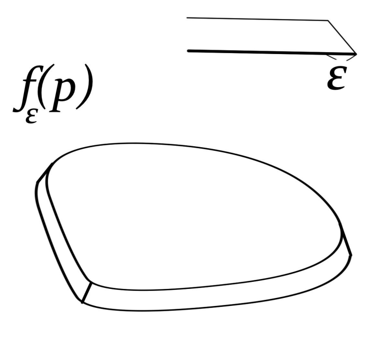
□

逆に、等周不等式は Sobolev の不等式から従う。実際、曲線 C に囲まれた領域 Ω に対し、十分小さい $\varepsilon > 0$ だけ Ω を縮めたものを Ω_ε とし、

$$f_\varepsilon(p) := \begin{cases} 1 & \text{if} \quad p \in \Omega_\varepsilon \\ \frac{d(p,C)}{\varepsilon} & \text{if} \quad p \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon \end{cases}$$

とおいてみる。ただし $d(p,C)$ は点 p から C への距離としている。

図 3



すると $\varepsilon \to 0$ のとき

$$\int_\Omega f_\varepsilon^2 \to A, \quad \int_\Omega |\nabla f_\varepsilon| = \frac{A - A_\varepsilon}{\varepsilon} \to L$$

となって等周不等式が得られる。(厳密にいうと f_ε は滑らかな関数ではないので、少し修正する必要がある)

等周不等式を (わざわざ難しそうな)Sobolev 不等式に言い換えたことはどんな利益をもたらすのだろうか。1 つには、領域の幾何学的情報がその上の関数たちの情報に託されたということが言える。関数は足し算や掛け算といった代数的な操作ができるので、抽象的ではあるがある意味扱いやすいものである。また、関数の収束といったものも (図形の収束といった概念に比べ) 扱いやすい。

微分方程式の解の性質を調べる際、このような関数空間を設定し Sobolev の不等式を用いることが大変有用である。

3 Laplacian の最小固有値

Sobolev 不等式は

$$\inf_f \frac{\left(\int_\Omega |\nabla f|\right)^2}{\int_\Omega f^2} = 4\pi$$

ということであった。分子を少し変えて、新たに

$$\inf_f \frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2} = \ ?$$

という問題を考えると、状況はガラリと変化する。

なぜこのような問題が重要なのか説明しよう。f が境界の近くで消えているので、部分積分を実行すると

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = -\int_\Omega \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f$$

となる。従って、Laplace 作用素 $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ を用いれば

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 = -\int_\Omega (\Delta f) f$$

が成り立つ。よって、実数 λ に対する微分方程式

$$\begin{cases} \Delta f + \lambda f = 0 & \text{on} \quad \Omega \\ f = 0 & \text{on} \quad C \end{cases}$$

を考えると、新しい方の下限を求める問題は解 f が存在するような最小の $\lambda > 0$ を求めることに他ならない。この微分方程式は領域の固有振動を表していて、様々な局面で重要な意味を持つ。

定理 3.1 (Rayleigh-Faber-Krahn の定理)**.** 微分方程式

$$\begin{cases} \Delta f + \lambda f = 0 & on \quad \Omega \\ f = 0 & on \quad C \end{cases}$$

の解が存在する最小の $\lambda > 0$ を λ_1 と置くと、

$$\lambda_1 \geqslant \frac{\pi}{A} j^2$$

が成り立つ。ここで $j = 2.4048...$ は *Bessel* 関数 $J_0(z)$ の正の最小零点である。さらに、等号成立は Ω が円盤であるときに限る。

証明は上で与えた定理 2.1 の証明と同様のアイデアに基づく。定理 2.1 と違い右辺が領域 Ω に依存していることに注意せよ。どちらにせよ円盤が特徴付けられるという事実は興味深い。

参考文献

[1] V. Blasjö: *The isoperimetric problem.* Amer. Math. Monthly **112** (2005), no. 6, 526–566.

[2] R. Osserman: *The isoperimetric inequality.* Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), no. 6, 1182–1238.

[3] A. E. Treibergs: *Inequalities that Imply the Isoperimetric Inequality.* Lecture notes (2002) available on his web page.