等周不等式

1　導入

定理 1.1 (等周定理)**.** 平面内の滑らかな曲線で囲まれた領域 Ω を考える。Ω の面積を $|\Omega|$、周の長さを L とすると、不等式

$$4\pi\,|\Omega| \leqslant L^2$$

が成り立つ。さらに、この不等式の等号が成り立つとき、Ω は円盤に一致する。

特に、長さが一定の曲線で囲まれた図形のうち面積が最大となるようなものが存在し、それは円盤である。面積が同じ図形のうち最短の長さで囲えるものが存在し、それは円盤である、ということもできる。定数 4π は円盤の場合から定まっている。L を 2 乗するのは、Ω を拡大したとき、周長は 2 倍、3 倍... と大きくなるのに対し、面積は 4 倍、9 倍、... と増えるからである。等周定理が成り立つことは古くから認識されていたらしく、カルタゴの建国者 Dido に纏わる次のような伝説がある。

Dido は元々フェニキアの都市国家トュロスの王女であったが、故あって国を追われた。現在のチュニジアに流れ着いた Dido は、その土地の王に分与を乞う。王は彼女に 1 頭の雌牛を与え、その皮で覆えるだけの土地を与えると約束する。Dido は雌牛の皮を細かく引き裂いて海沿いの土地を取り囲み、砦を築けるだけの土地を得た。これがカルタゴの始まりであるという。

海岸線を直線と見做すと、面積を最大にする囲い方は、実は半円である。これは等周不等式からただちに従う。このような単純な結論に対し、等周定理の厳密な証明が与えられたのはかなり近年 (Weierstrass, 1879) のことである。現在では様々な証明が知られており、その先に豊かな数学背景が広がっていることも多い。今回は、等周不等式の証明について多少考えつつ、その難しさについて理解したい。

2　三角形の場合

まずは三角形の場合を考えよう。

定理 2.1. 周の長さが等しい三角形をいろいろ考える。このうち、面積が最大となるものが存在し、それは正三角形である。

証明. **面積最大となる三角形 ABC が、仮に正三角形でないとして矛盾を導く。**$\mathrm{AB} \neq \mathrm{AC}$ としてよい。B と C を焦点とする楕円に沿って A をちょっと上にずらすと、面積は増えてしまう。これはおかしい。 □

実はこの証明は**不完全**である。何故か？ここで示しているのは

最大値を達成する三角形が存在すれば、それは正三角形でなければならない

ということに過ぎず、

面積が最大の三角形が存在する

ということが分かっていない (!) からである。実際、周の長さが一定という制限がなければ、これは明らかに正しくない。

Perron の冗談

1 と異なる自然数に対し、それより大きい自然数が常に取れる (2 乗すればよい)。従って 1 は最も大きい自然数である。

今の場合、大学 1, 2 年生で学ぶ「連続関数の最大値定理」を用いれば、この問題は次のようにしてクリアできる。

最大値の存在

三角形 ABC を xy 平面に置き、点 C を固定して A と B をいろいろ動かしてみる。このとき、三角形の面積は A と B の座標成分について連続な関数である。さらに周の長さが一定であるとするならば、A と B は有界な範囲を動く。従って、面積が最大となるような A、B の配置が存在する。

ちなみに、3 辺の長さが a, b, c であるような三角形の面積は

$$16\,|\mathrm{ABC}|^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

で与えられる。これを知っていれば、$a+b+c$ が一定のとき右辺の最大値が実際に $a=b=c$ で達成されることを直接示すこともできる。

もっと簡単なやり方が他にないものだろうか？さておき、次は四角形の場合を考えてみよう。

3　四角形の場合

定理 3.1. 周の長さが等しい四角形をいろいろ考える。このうち、面積が最大となるものが存在し、それは正方形である。

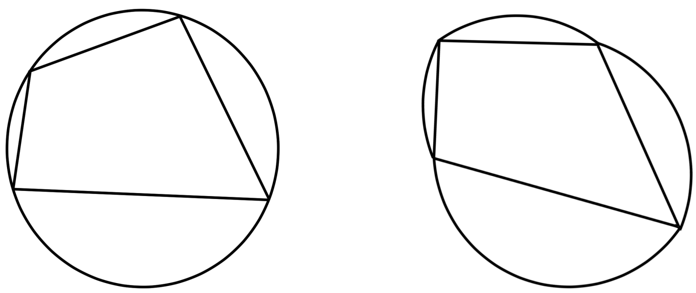
証明. これは三角形の場合の議論が使える。実際、四角形 ABCD がもし菱形でないとすると、$\mathrm{AB} \neq \mathrm{AC}$ としてよい。三角形 ABC に対して先ほどと同じ A' をとれば、$\mathrm{A}'\mathrm{BCD}$ の面積は大きくなってしまう。菱形のうち正方形が面積最大であることは簡単に分かる。 □

しかし、四角形の場合はもっと興味深いヴァリエーションがある。(素直な一般化よりも面白い変化の方向性を探るのは、数学の常である。)

定理 3.2. 4 辺の長さ a, b, c, d を固定して四角形をいろいろ動かす。面積が最大となるのは、四角形が円に内接しているときである。

これは等周定理の帰結でもある。なぜか？ 辺の長さが a, b, c, d であって円に内接するような四角形をとってくる。このとき、四角形の外側で円に囲まれた部分は剛体と見做して、四角形だけをぐにゃぐにゃ動かしてみるのである。すると、この操作で周の長さは変わらない。だから、等周定理により、元の四角形のときだけ面積が最大になる。

図 1

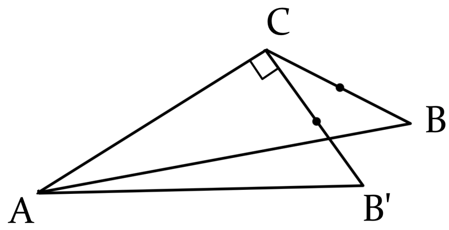


この証明を見ると、等周定理と定理 3.2 には何かもっと密接な関係があるのではないかという気がしてくるだろう。

補題 3.3 (定理 3.2 の Dido 版と呼ぶべきもの)**.** 1 辺 AB を除いて他の 2 辺の長さが変わらない三角形をいろいろ考える。面積が最大となるのは、AB を直径に持つ円に内接しているときである。

証明. 面積最大なものが件の円に内接していないと仮定して、矛盾を導こう。頂点 C で角 ACB が直角でないとしてよい。C を中心として CB を回転させ、角 ACB' が直角になるような B' を得る。

図 2



$\mathrm{AB} \neq \mathrm{AB}'$ かもしれないが、$\mathrm{CB} = \mathrm{CB}'$ のままで、$|\mathrm{ABC}|$ よりも $|\mathrm{AB}'\mathrm{C}|$ は大きくなってしまった。これはおかしい。

□

定理 3.2 の直接証明を与えよう。面積最大の四角形 ABCD があったとして、これが円に内接していないとして矛盾を導く。ABCD を ABC と ACD に分けてそれぞれに補題を適用すれば、同じ周長のままで面積をもっと大きくできる。これはおかしい。

以上で定理 3.2 が証明できた。もちろん、最大値の存在が分かっての話である。なお、Hero の公式に相当するものとして、Brahmagupta-Bretschneider の公式

$$\begin{aligned} 16\,|\mathrm{ABCD}|^2 =& (-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d) \\ & - abcd\cos^2\frac{\beta+\delta}{2} \end{aligned}$$

がある。ここで β, δ はそれぞれ頂点 B, D での内角とした。

4　多角形の場合

同様のアイデアで、次が証明できる。興味のある方は次回までにぜひ考えてみてほしい。

定理 4.1. 周の長さを変えずに n 角形をいろいろ考える。このうち、面積が最大となるものが存在し、それは正 n 角形である。

定理 4.2. 各辺の長さを変えずに n 角形をいろいろ考える。面積が最大となるものは、円に内接する。

5 一般の場合–Steiner のアイデア

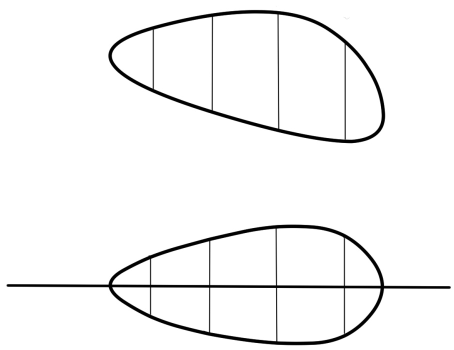
J. Steiner(1796〜1863) は等周定理に関して様々な証明方法を考案したことで知られる。残念ながらそれらは現代の視点から見ると全て厳密性に欠けたものであったが、座標や代数を用いない彼のアイデアは幾何学的直感と魅力に溢れている。

まず次のことを指摘しておく。領域内の勝手な 2 点に対しそれらを結ぶ線分がまるごとその領域に含まれているとき、その**領域は凸である**という。

補題 5.1. 周の長さが等しい領域で面積が最大なものは、凸でなければならない。

Steiner のアイデアは、「面積を最大にするためには、領域はさらに対称でなければならない」という直感に基づく。始めに勝手な凸領域 Ω_1 を取る。さらに勝手な軸をとり、Ω_1 を等積変形して、線対称なもの Ω_2 に置き換える。

図 3



まず、凸だからこのような操作ができることに注意する。さらに台形によって近似して考えれば、(定理 2.1 の議論により！) 周の長さは決して増えないことがわかる。今度は面積を保ったまま周の長さを減らしていくわけである。Ω_2 に対しまた別の軸をとって、線対称な図形 Ω_3 をとる。軸をバラバラに選びながらどんどんこの操作を続けていけば、図形の列

$$\Omega_1, \Omega_2, \dots \Omega_n, \dots$$

はあらゆる軸に関して線対称な図形、すなわち円盤に近づいてゆく「だろう」。そうすると

$$\begin{aligned} |\Omega_1| &= |\Omega_2| = \cdots \\ &= |\text{円盤}| = L(\text{円周}) \\ &\leqslant L(\Omega_1) \end{aligned}$$

となる「はず」だ。以上が概略である。

Steiner のアイデアをもう 1 つ紹介しよう。さっきと同様、最初に勝手な領域 Ω_1 を取る。Ω_1 が円盤であるなら、ここで止める。Ω_1 が円盤でないならば、同じ円周上にない 4 点がとれる。補題の証明まで考えると、この 4 点を頂点とする四角形は Ω_1 に含まれるとしてよい。このとき、図 1 と同様の変形を施して、周の長さは保ったまま、Ω_1 のうち四角形の部分だけ面積を大きくすることができる。このようにして得られた領域を Ω_2 とおく。Ω_2 が円盤ならば、ここで止める。もしそうでないならば、Ω_2 に同じことをして、Ω_3 を得る。以下これを繰り返して

$$\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_n, \ldots$$

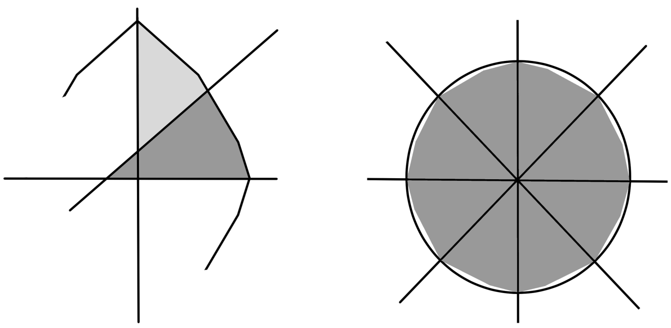
という列を得る。これは円盤に収束する「はず」である......。Steiner のこのようなアイデアは、後に Carathéodory によって厳密化された (1909)。

6　より厳密な証明

次の証明は 1909 年に Study が与えたものらしい。上と同様、「最大値が存在する」ということの代わりに「円盤に近づくようなうまい列が取れる」ことを示すのがポイントである。

証明. 長さ L の領域 Ω_1 から始めて、周長を保ちつつ面積が増えるような列を作る。すでに見てきたように、Ω_1 は凸であるとしてよく、また、x 軸 y 軸に関して線対称であるとしてよい。傾き 45 度の直線で、第 1 象限における Ω_1 の周長を 2 等分する。図 4 のように、2 つのパーツが生じる。

図 4



面積の大きい方を選び、先端を原点まで移動し、コピー&ペーストする。こうすれば、周長を保ったまま、もっと大きい Ω_2 を得ることができる。しかも Ω_2 の対称性は上がっているのである！ 以下同様のことを繰り返せば、対称軸が 2^n 本の領域 Ω_n を得ることができる。対称軸における Ω_n の端点は 2 つの円盤に挟まれており、その間の距離は $2^{-n-2}L$ よりも狭い。

従って、円盤の間隔はどんどん小さくなり、Ω_n はある円盤に収束する。

□

興味のある方は、最初にやった三角形の場合の等周定理で、このような議論ができないか考えてみてほしい。

参考文献

[1] V. Blasjö: *The isoperimetric problem.* Amer. Math. Monthly **112** (2005), no. 6, 526–566.

[2] R. Osserman: *The isoperimetric inequality.* Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), no. 6, 1182–1238.

[3] A. E. Treibergs: *Inequalities that Imply the Isoperimetric Inequality.* Lecture notes (2002) available on his web page.