変分法から見たKähler-Einstein問題

A variational aspect of the Kähler-Einstein problem

久本智之　(名大多元数理)*

1. Fano多様体とKähler-Einstein計量

本稿では、断らない限りXを$\mathbb{C}$上定義された滑らかな代数多様体とし、ωをその上のKähler計量とする。ωのRicci曲率が自身に比例する、すなわちある定数λが存在して

$$\mathrm{Ric}\,\omega = \lambda\omega$$

となるとき、Kähler-Einstein計量という。このような計量が存在すれば、λの符号に応じて、XはFano多様体、Calabi-Yau多様体、あるいは標準モデル(canonically polarized manifold)に限る。このような計量の存在を問うことをCalabiの問題という。標準モデルの場合はAubin[A76], Yauによって、Calabi-Yauの場合はYau [Y77]によってKähler-Einstein計量が常に存在することが示された。一方、Fano多様体についてはKähler-Einstein計量が存在するとは限らない。例えば$\mathbb{P}^2$はKähler-Einstein計量を持つが、$\mathbb{P}^2$の１点ブローアップなどはそうならない。ベクトル束に対するHermite-Einstein計量との類似などから、この種の計量の存在は幾何学的不変式論(GIT)に由来するような多様体の安定性と同値になると考えられた。二木の不変量([F83])、そして満渕[M86]、Tian [T97]による二木不変量の一般化を経て、Donaldson([D02])は一般の偏極多様体に対しK安定性を定義した。その後の発展は著しく、Donaldson-Sunによる仕事([DS14])ののち、次の定理が確立した。

定理 1.1 ([CDS15]) Fano多様体XがKähler-Einstein計量を持つことと、偏極多様体$(X, -K_X)$がK準安定なことは同値である。

彼らの証明はcone singularityを許したKähler-Einstein計量を考え、cone angleに関する連続法を実行するというものである。しかし、本稿ではエネルギー論的な視点から定理1.1を理解したい。元々Calabiが問題を提出したのもこのような視点からだった。Calabiの計算ではスカラー曲率を用いたが、本稿ではRicci曲率による定式化を採用する。計量ω_0を固定すれば、$c_1(-K_X)$に属するKähler計量は$\omega = \omega_0 + \sqrt{\text{-}1}\partial\bar{\partial}\,\varphi$と書くことができて便利である。以下$X$の複素次元を$n$とし、

$$\mathrm{Ric}\,\omega - \omega = \sqrt{\text{-}1}\partial\bar{\partial}\,\rho, \qquad \int_X (e^\rho - 1)\omega^n = 0$$

を満たすような関数ρをRicciポテンシャルという。Calabiの汎関数に相当する

$$R(\varphi) = R(\omega) := \frac{1}{V}\int_X (e^\rho - 1)^2\omega^n \tag{1.1}$$

本研究は科研費(課題番号:17K14185)の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 32Q20, 53C55
キーワード：Kähler-Einstein 計量, 安定性
* 〒464-8602 愛知県名古屋市千種区不老町 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
e-mail: hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp
web: http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hisamoto/

の零点としてKähler-Einstein計量を捉える。ここで$V := \int_X \omega^n$は多様体の体積で、自己交点数L^nに等しい。実は$e^\rho - 1$は無限次元のモーメント写像と見なすことができる。すなわち、多様体の可微分構造Mを止めてシンプレクティック多様体(M, ω)に乗る複素構造全体が成す無限次元のKähler多様体[1]を考えると、$e^\rho - 1$はHamilton微分同相群に関するモーメント写像を定める([D15])。すると、Kähler-Einstein計量と安定性に関係がつくことは、シンプレクティック商とGIT商の対応から明快に説明できる。さらにこの描像に基づけば、Kähler-Einstein計量はDエネルギー[2]

$$D(\varphi) := -\log \int_X e^{-\varphi+\rho_0}\omega_0^n - \frac{1}{(n+1)V}\sum_{i=0}^{n}\int_X \varphi\omega^i \wedge \omega_0^{n-i} \tag{1.2}$$

の臨界点として特徴付けられる。実際Dエネルギーの微分を計算すると、φに関するMonge-Ampère方程式

$$V^{-1}(\omega_0 + \sqrt{\text{-}1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = \mu_\varphi := \frac{e^{-\varphi+\rho_0}\omega_0^n}{\int_X e^{-\varphi+\rho_0}\omega_0^n} \tag{1.3}$$

が得られ、これはKähler-Einstein方程式と同じものである。スカラー曲率を用いて同様に導出されたものが満渕のKエネルギー[M86]である。計量の空間を

$$\mathcal{H} := \{\varphi \in C^\infty(X;\mathbb{R}) :\ \omega = \omega_0 + \sqrt{\text{-}1}\partial\bar{\partial}\varphi > 0\}$$

とおくと、Dエネルギーは$\mathcal{H}$上測地凸になる[3]。さらにDは正則ベクトル場に沿ってアファイン関数で、その傾きが古典的な二木不変量を与える。

変分法によってエネルギーの臨界点を求めるには、$\mathcal{H}$を適切な位相で完備化しなければならない。これにはBedford-Taylorの仕事[BT76]に端を発する複素ポテンシャル論の進歩が不可欠だった。根源的なアイデアは、有界な多重劣調和関数φについて正カレント$(\sqrt{\text{-}1}\partial\bar{\partial}\varphi)^i$を帰納的に

$$\int_X (\sqrt{\text{-}1}\partial\bar{\partial}\varphi)^i \wedge \alpha := \int_X (\sqrt{\text{-}1}\partial\bar{\partial}\varphi)^{i-1} \wedge \varphi\sqrt{\text{-}1}\partial\bar{\partial}\alpha$$

と定めるというものである。$(\sqrt{\text{-}1}\partial\bar{\partial}\varphi)^{i-1}$が測度を係数に持つので、有界な$\varphi$について右辺が意味を持つ。このアイデアは有界でないω_0-多重劣調和関数$\varphi \in \mathrm{PSH}(X, \omega_0)$にも拡張でき、方程式(1.3)の弱解が定義される。それは2つの確率測度が一致するという条件になっている。このように、スカラー曲率でなくRicci曲率を用いると弱解の解析が易しく、また特異点のある多様体にも融通が効く。なお、特異計量がDの最小点であったとしても、それが方程式の弱解であることは明らかではない。そのことを示すには、Berman-Boucksomによる微分公式[BB10]が必要である。弱解の連続性は粘性解の理論[EGZ11]によって保証される。さらに、Monge-Ampèreエネルギー

$$E(\varphi) := \frac{1}{(n+1)V}\sum_{i=0}^{n}\int_X \varphi\omega^i \wedge \omega_0^{n-i} \tag{1.4}$$

[1] この無限次元空間は特異点を持つ。

[2] このエネルギー自体は当時専門家の間でよく知られていたものだったようである。最初に明示的に書いたのがDingだとしてDingのエネルギーと呼ばれることが多いが、実は坂東-満渕の方が早い。本稿では混乱を避けるためDエネルギーと呼ぶ。

[3] ただし、2点を結ぶ測地線は滑らかにならない。これが多重劣調和関数を考える1つの理由である。

も任意の ω_0-多重劣調和関数に対して拡張できる。$E(\varphi)$ が連続になるような最も粗い位相を $\mathcal{H}(X,L)$ に与えると、求める完備化は

$$\mathcal{E}^1(X,L) := \{\varphi \in \mathrm{PSH}(X,\omega_0) :\ E(\varphi) > -\infty\} \tag{1.5}$$

で与えられる。E はスケール不変ではない: $E(\varphi+c) \neq E(\varphi)$ ので、必要なら $J(\varphi) := \frac{1}{V}\int_X \varphi\omega_0^n - E(\varphi)$ を用いることもある。このような特異計量に対する D エネルギーの凸性は Berndtsson([B09]) によって示された。Berndtsson の定理はより一般に随伴直線束の順像の正値性を述べており、小平の消滅定理, 大沢-竹腰拡張定理の延長にある 1 つの到達点である。

K エネルギーとの関係について、Berman の熱力学的な解釈 ([B13]) を補足しておく。ポイントは、確率測度 μ に対する相対エントロピー $H(\mu|\mu_0) := \int_X \log \frac{d\mu}{d\mu_0} d\mu$ の Legendre 変換公式

$$H(\mu|\mu_0) = \sup_{g \in C^0(X;\mathbb{R})} \left[-\log \int_X e^g d\mu_0 + \int_X g d\mu \right]$$

である。Monge-Ampère エネルギーの双対を $E^*(\mu) := \sup_\varphi \left[E(\varphi) - \int_X \varphi d\mu\right]$, 自由エネルギーを

$$F(\mu) = H(\mu|\mu_0) - E^*(\mu)$$

と定めると、満渕の K エネルギーは $M(\varphi) = F(V^{-1}(\omega_0 + \sqrt{\text{-1}}\partial\bar{\partial}\varphi)^n)$ で与えられる。この関係に注目すれば、$M \geqslant D$ さらに M と D の最小点が等価であることが簡単に確かめられる。

2. 安定性の見直し

1 つの動機は一般の偏極多様体 (X,L) に対する Yau-Tian-Donaldson の未解決予想である。

予想 2.1 偏極多様体 (X,L) が定スカラー曲率 Kähler 計量を持つことと K 準安定であることは同値である。

$\lambda L = -K_X$ のときは、定スカラー曲率 Kähler 計量と Kähler-Einstein 計量は同じものである。Fano 多様体に関する Chen-Donaldson-Sun の証明は Cheeger-Colding による Riemann 多様体の非崩壊理論を用いている。非崩壊性を導くには Ricci 曲率のコントロールが必要なので、この方法は一般の偏極多様体には使うことができない。このため、K 安定性よりも先天的に強い安定性が必要なのではないかということが色々な人によって考えられてきた。

もう 1 つの動機は、変分法の観点から安定性を理解することである。元々K 安定性は [T97] によって多様体の退化に沿った K エネルギーの挙動を見ることにより考案された。これに Donaldson が純代数的な定義を与えたわけだが、Donaldson が扱ったような一般的な退化について精密な関係式を知りたい。

定義 2.2 ([D02]) $\mathbb{P}^1$ の原点まわりのアファイン座標を τ とする。同変な $\mathbb{C}^*$ 作用を伴う偏極スキームの族 $\pi : (\mathcal{X},\mathcal{L}) \to \mathbb{P}^1$ が原点 $\tau = 0$ の外で自明な族 $((\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}) \times X, p_2^* L)$ と群作用を込めて同型になっているとき、同型射を含めたこれらのデータをテスト配位という。

以下$\mathcal{X}$は正規であると仮定するが、中心ファイバー$\mathcal{X}_0$は非常に特異点が悪く、被約ですらない。Tianが最初に考えていたのは$\mathcal{X}_0$が正規多様体という状況である。このときは自動的に$\mathcal{L} = -K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1}$で、$\mathcal{X}_0$は$\mathbb{Q}$-Fano多様体となる。先験的[4]には$L = -K_X$であっても$\mathcal{L} \neq -K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1}$となるような族を考える必要がある。一方で、このような一般的な退化に沿ってエネルギーの振る舞いを調べることができる。というのは、$\mathcal{L}$のファイバー計量Φを取ると、群作用$\lambda\colon \mathbb{C}^* \to \mathrm{Aut}(\mathcal{X}, \mathcal{L})$で引き戻すことによって$\mathcal{H}$の曲線$\varphi^t$が決まるからである。ファイバー計量$\Phi$を取り替えても$t \to \infty$における$\varphi^t$の挙動に本質的な差は生じない。

$\mathbb{A}^1$ではなく$\mathbb{P}^1$上の族を考えるのは、以下で$\mathcal{L}^{n+1}$といった交点数を考えたいからである。双有理変換$f\colon \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$によって$\mathcal{X}$をモデル$\mathcal{X}'$に取り替えたとき、こういった交点数は変化しない。実はテスト配位$(\mathcal{X}, \mathcal{L})$自身よりも、このようなモデルの同値類がある意味で本質的である。適当にモデルを取り替えれば全射$q\colon \mathcal{X} \to \mathbb{P}^1 \times X$が存在するとしてよい。$\mathcal{L}$と$q^* p_2^* L$の交点数を簡単のため$\mathcal{L}L^n$などと表すことにする。

定理 2.3 ([B16] for D, [BHJ16] for J and M) 上記エネルギー汎関数たちについて

(1) $\displaystyle \lim_{t\to\infty} \frac{E(\varphi^t)}{t} = E(\mathcal{X}, \mathcal{L}) := \frac{\mathcal{L}^{n+1}}{(n+1)V}$

(2) $\displaystyle \lim_{t\to\infty} \frac{J(\varphi^t)}{t} = J(\mathcal{X}, \mathcal{L}) := V^{-1}(\mathcal{L}L^n) - \frac{\mathcal{L}^{n+1}}{(n+1)V}$

(3) $\displaystyle \lim_{t\to\infty} \frac{D(\varphi^t)}{t} = D(\mathcal{X}, \mathcal{L}) := \mathrm{lct}_{(\mathcal{X},\mathcal{B})}(\mathcal{X}_0) - 1 - \frac{\mathcal{L}^{n+1}}{(n+1)V}$

(4) $\displaystyle \lim_{t\to\infty} \frac{M(\varphi^t)}{t} = M(\mathcal{X}, \mathcal{L}) := V^{-1}(K^{\log}_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1}\mathcal{L}^n) - \frac{nK_X L^{n-1}}{2(n+1)V^2}\mathcal{L}^{n+1}$

が成り立つ。ただし、$\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}} - \mathcal{L}$は$\mathrm{supp}\,\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}_0$によって定まる因子とする。

(3) だけ X は Fano 多様体としている。右辺に現れた $\mathrm{lct}_{(\mathcal{X},\mathcal{B})}(\mathcal{X}_0)$ はいわゆる log-canonical thresholdである。仮に$K_{\mathcal{X}}$が直線束として定義できるならば、$\mathrm{lct}_{(\mathcal{X},\mathcal{B})}(\mathcal{X}_0) - 1$は随伴束順像の次数$\deg \pi_*(K^{\log}_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1} + \mathcal{L})$に等しい。ここにBerndtssonの定理との関係が見て取れるが、$\mathcal{X}$ は一般に $\mathbb{Q}$-Gorenstein singularity とは限らないため、このように定義する。Fano多様体$(X, -K_X)$がD安定であるとは、勝手なテスト配位について$D(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \geqslant 0$となり、$\mathcal{X}_0$が被約[5]で等号が成り立つならば$(\mathcal{X}, \mathcal{L})$が自明になることをいう。$M(\mathcal{X}, \mathcal{L})$はいわゆるDonaldson-二木不変量に等しい ([W12], [O12], [O13])。ここでlog canonical divisor $K^{\log}_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1}$を取っているのは、normalized base changeについて$M(\mathcal{X}, \mathcal{L})$が斉次的になるようにするためである。偏極多様体$(X, L)$がK安定であるとは、自明でないテスト配位について$M(\mathcal{X}, \mathcal{L}) > 0$が成り立つことをいう。実はテスト配

[4] 極小モデル理論を使うと、実はFano多様体については$\mathcal{L} = -K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1}$かつ$\mathcal{X}_0$が正規であるような退化を考えるだけでも十分であることが示せる ([LX11])。特に、D安定性とK安定性の同値性が従う。最近の論文 [BJ18] では、Bermanの熱力学的解釈を非Archimedes化することにより極小モデル理論を使わずにこれを証明している。

[5] XがKähler-Einstein計量を持っていても、$\mathcal{X}_0$が被約でないときは$D(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = 0$となるテスト配位が存在する。

位 (の同値類) を Berkovich analytification $(X^{\mathrm{an}}, L^{\mathrm{an}})$ 上の計量と見做すことができて、定理の右辺は各種エネルギー汎関数の非 Archimedes 化になっている ([BHJ15])。

ここまで来ると、我々にとって欲しい安定性がどのようなものかが見えてくる。ある定数 $\varepsilon, C > 0$ が存在して、勝手な $\varphi \in \mathcal{H}$ に対し

$$D(\varphi) \geqslant \varepsilon J(\varphi) - C \tag{2.1}$$

が成り立つとき、D エネルギーは coercive であるという。Kähler-Einstein 計量が存在すればこのような増大条件が成り立つことが知られていた ([T97])。完備化 $\mathcal{E}^1$ を用いた明快な証明が [DR15] にある。同様のことは定スカラー曲率計量についても正しい [BDL16]。ただし、X がゼロでない正則ベクトル場を持つときは増大条件 (2.1) に修正が必要である。そのため以下しばらく $\mathrm{Aut}(X, L)$ は離散的であるとする。

定義 2.4 ([BHJ15]) ある定数 $\varepsilon > 0$ が存在して勝手なテスト配位に対し

$$D(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \geqslant \varepsilon J(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \tag{2.2}$$

が成り立つとき、Fano 多様体 $(X, -K_X)$ は一様 D 安定であるという。

自明なテスト配位は $J(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = 0$ によって特徴付けられるので、一様 D 安定性は確かに D 安定性より強い概念である。ノルム $J(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ は Székelyhidi [S06] が定義した L^p ノルムと、$p = 1$ のとき同値になる。彼は後述する Calabi 型汎関数の不等式評価から主に $p = 2$ の場合を考察したのだが、$p > \frac{n}{n-1}$ のとき L^p ノルムに関して一様安定な多様体は存在しない。一方で、Kähler-Einstein 計量を持つような Fano 多様体は ($\mathrm{Aut}(X)$ が離散なら) 必ず一様 D 安定になる。逆も正しい。

定理 2.5 ([BBJ15]) Fano 多様体の一様 D 安定性と D エネルギーの coercivity は同値である。

結果だけを見ると Chen-Donaldson-Sun の定理の再定式化だが、証明が変分法であるという点が重要である。特に Cheeger-Colding の理論を必要としないことは特筆すべきだろう。証明の鍵となるアイデアは、仮に D エネルギーが減衰しているとして、その方向に構成した測地線 φ^t をテスト配位の列で近似することである。これは多重劣調和函数に対する Demailly の多項式近似定理の亜種と見做せる。Demailly の近似定理は大沢-竹腰拡張定理の帰結であったことを思い出したい。この意味で、Berman-Boucksom-Jonsson の証明は複素解析的であると言える。なお、φ^t を得る際に「相対エントロピーについて有界な $\mathcal{H}$ の閉部分集合はコンパクトになる」という [BBEGZ11] の定理が基本的な役割を果たす。そのため、証明の中で一度 K エネルギーを経由する必要がある。

自己同型群が離散的でない場合は、後述する満渕ソリトンの存在問題を含め現在研究中である。トーリック偏極多様体に対しては次の定理が得られる。

定理 2.6 ([H16]) 対 (X, L) を凸多面体 P の定めるトーリック偏極多様体とすると、K エネルギーの coercivity は次の条件と同値である: ある定数 $\varepsilon > 0$ が存在して、区分的に線形な凸関数 $f\colon P \to \mathbb{R}$ に対し常に

$$\int_{\partial P} f - \frac{\mathrm{area}(\partial P)}{\mathrm{vol}(P)} \int_P f \geqslant \varepsilon \inf_g \left[\frac{1}{\mathrm{vol}(P)} \int_P (f+g) - \min_P (f+g) \right] \tag{2.3}$$

が成り立つ。ただし g はアファイン関数とする。

区分的に線形な凸関数 $f\colon P \to \mathbb{R}$ はその epigraph が $n+1$ 次元の凸多面体を定めているから、トーラスについて同変なテスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ に相当する。

3. 最適退化の問題

現在興味ある問題の 1 つは、Kähler-Einstein 計量が存在しないとき何が起こるかというものである。このような状況の解析には、多様体の非崩壊理論や計量の時間発展方程式が本質的に必要になると考えられる。

まずは定理 2.3 から得られる次の不等式に注目しよう。

定理 3.1 ([H16])

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{H}} R(\varphi)^{\frac{1}{2}} \geqslant \sup_{(\mathcal{X}, \mathcal{L})} \frac{-D(\mathcal{X}, \mathcal{L})}{\|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|_2} \tag{3.1}$$

$\|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|_2$ はテスト配位の L^2 ノルムと呼ばれる代数的な不変量である。Donaldson はスカラー曲率の場合に類似の不等式を示し、実は等号を成立させるようなテスト配位があるのではないかと予想した。その原型はベクトル束の Harder-Narashimhan フィルトレーションに見られる。このように何らかの意味で $D(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ を最小にするようなテスト配位を最適退化と呼ぶ。最適退化の定式化にはノルムの選択も含め色々なものが考えられる。また、$M(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ についての最適退化は $D(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ についての最適退化と一般に異なるかもしれない。$M(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ についての最適退化は Székelyhidi の先行研究 [S08] がある。しかし実は $D(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ の方が取り扱い易く、特にトーリック Fano 多様体の場合などは最適退化の様子がかなり詳しく分かる。実際、反射的な凸多面体 P の定める Fano 多様体 X を考えると、区分的に線形な凸関数 $f\colon P \to \mathbb{R}$ が定めるテスト配位に対し

$$D(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = -f(0) + \frac{1}{V}\int_P f, \quad \|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|_2 = \left(\frac{1}{V}\int_P (f - \hat{f})^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

が成り立つ。それぞれの右辺を $D(f), \|f\|$ と書こう。すると、X の端的ベクトル場はアファイン関数 e であって任意のアファイン関数 g に対し $D(g) + \int_P ge = 0$ を満たすものとして特徴付けられる。勝手な凸関数 f に対し $D(f) + V^{-1}\int_P fe \geqslant 0$ が成り立つとき、P は相対 D 安定であるという。

定理 3.2 ([Y17]) 反射的な凸多面体 P が相対 D 半安定でないとすると、ある凸関数 d が存在し、$d + e$ は (3.1) の等号を達成する。さらにアファイン関数 h が存在して $d = \max\{0, h\}$ と書ける。

さて、最適退化の解析的側面は計量の時間発展方程式であると考えられる。筆者はこの種の発想を尾高悠志さんに初めて教わった。Kähler-Einstein 計量に関係する時間発展方程式といえば (正規化された)Kähler-Ricci 流

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega = -\operatorname{Ric}\omega + \omega \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial}{\partial t}\varphi = -\rho \tag{3.3}$$

がある。Kähler-Ricci 流の極限はテスト配位の H 不変量 (相対エントロピーと関係する) を最適化することが分かっている ([DS17])。そして H 不変量の定める安定性は K 半安定性と同値になる。しかしながらこの不変量は有理数ではなく、従って定理 2.3 のように自己交点数で書くことはできない。ソリトンベクトル場も代数的な 1 パラメータ部分群を生成しないので、最適退化を構成するという観点からは少し不都合に見える。

そこで、D エネルギーの勾配流

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi = 1 - e^{\rho} \tag{3.4}$$

を考える。スカラー曲率で同じことを考えると Calabi 流が導出されるが、上の方程式については意外にも多くのことは調べられていなかったようである。方程式の右辺は Monge-Ampère 積の逆数を本質的に含むから、特に (3.4) は放物型であり、時間局所解を持つことが直ちに分かる。空間局所的にはこの種の方程式を [K82] が調べている。我々はこれを逆 Monge-Ampère 流と呼ぶことにする。自己相似解は [M01] で導入されたものと一致しており、こちらは満渕ソリトンと呼びたい。Calabi 流については時間大域解の存在は未解決であるが、逆 Monge-Ampère 流は 2 階なので比較的易しい。実際に次のことが分かった。

定理 3.3 ([CHT17]) Fano 多様体 X の勝手な初期計量に対し逆 Monge-Ampère 流 (3.4) の時間大域解が存在する。さらに、もし X が唯一つの Kähler-Einstein 計量を持つならば、逆 Monge-Ampère 流はポテンシャル関数 φ_{KE} に弱収束する。

Kähler-Ricci 流を含めこの種の時間大域解の存在についてはまず最大値原理によって C^0 評価を行うのが筋だが、(3.4) ではうまくいかない。そこで、勾配流であるという性質から、完備化された計量の空間 $\mathcal{E}^1$ 上で (3.4) の弱解が収束していることに注目する。上で説明した変分法の理論を活用すると、大域解の存在は複素ポテンシャル論における Kołodziej の評価 [K98] に帰着する。

逆 Monge-Ampère 流と Kähler-Ricci 流 (3.3) とを比べると、Ricci ポテンシャル関数 ρ が小さいとき両者は (少なくとも形式的には) 近い挙動を示すように見える。一方で、X が不安定な場合はその振る舞いに大きな差が生じる。例えばトーリック Fano 多様体の場合を考えると、逆 Monge-Ampère 流は Yao の構成した最適退化に収束することが分かる。

定理 3.4 ([CHT17]) トーリック Fano 多様体 X の逆 Monge-Ampère 流 $\varphi = \varphi_t$ を考え、$e^{\rho_\varphi} - 1$ を凸多面体上の関数 σ と同一視する。もし X が相対 D 半安定ならば、$t \to \infty$ のとき σ は端的ベクトル場に相当するアファイン関数 e に収束する。もし X が相対 D 半安定でないならば、$t \to \infty$ のとき σ は最適退化 $e + d$ に L^2 収束する。

トーリック Fano 多様体は常に Kähler-Ricci ソリトンを持つので、H 不変量の最適化は常にソリトンベクトル場で与えられる。一方で、トーリックの場合満渕ソリトンの存在と相対的一様 D 安定性は同値であり、ソリトンベクトル場は端的ベクトル場と一致する。このことから、満渕ソリトンを持たない 3 次元トーリック Fano 多様体が存在する。実際に Yao の構成した最適退化は中心ファイバーに既約成分をちょうど 2 個持つので、ベクトル場で生成することはできない。

先に述べたとおり、最適退化の定式化には様々なものがあり得るので、ここで述べた逆 Monge-Ampère 流によるアプローチは唯一のものではない。例えば [F16], [BJ17] では、退化の標準因子を調べる代わりに X 上の付値の食い違い係数 (log-discrepancy) を用いることで多様体の K 安定性を測っており、この意味で最適な付値の存在が示されている。ただし最適付値は多分に超越的で、quasi-monomiality が未解決である。不変量 $D(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ や $M(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ を元のエネルギーの非 Archimedes 化と見ると、最適退化の

問題は変分問題そのものの非 Archimedes 的類似と考えることもでき、元の変分問題で培ったアイデアの応用が期待される。最近特に代数幾何の側から興味を持たれている cone singularity への退化の話 ([DS17]) との関係も興味がある。

参考文献

[A76] T. Aubin: *Équations du type Monge-Ampère sur les variaétés kähleriennes compactes.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **283** (1976), no. 3, Aiii, A119–A121.

[BT76] E. Bedford and A. Taylor: *The Dirichlet problem for a complex Monge–Ampère equation.* Invent. Math. **37** (1976), no. 1, 1–44.

[B13] R. J. Berman: *A thermodynamical formalism for Monge-Ampère equations, Moser-Trudinger inequalities and Kähler-Einstein metrics.* Adv. Math. **248** (2013), 1254–1297.

[B16] R. J. Berman: *K-polystability of Q-Fano varieties admitting Kahler–Einstein metrics.* Invent. Math. **203** (2016), no. 3, 973–1025.

[BB10] R. J. Berman and S. Boucksom: *Growth of balls of holomorphic sections and energy at equilibrium.* Invent. Math. **181** (2010), no. 2, 337–394.

[BBGZ13] R. J. Berman, S. Boucksom, V. Guedj, and A. Zeriahi: *A variational approach to complex Monge-Ampère equations.* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **117** (2013), 179–245.

[BBEGZ11] R. J. Berman, S. Boucksom, P. Eyssidieux, V. Guedj, and A. Zeriahi: *Kähler-Einstein metrics and the Kähler-Ricci flow on log Fano varieties.* `arXiv:1111.7158`.

[BBJ15] R. J. Berman, S. Boucksom, and M. Jonsson: *A variational approach to the Yau-Tian-Donaldson conjecture.* `arXiv:1509.04561`.

[BDL16] R. J. Berman, T. Darvas, and C. H. Lu: *Regularity of weak minimizers of the K-energy and applications to properness and K-stability.* `arXiv:1602.03114`.

[BP08] B. Berndtsson and M. Paun: *Bergman kernels and the pseudoeffectivity of relative canonical bundles.* Duke Math. J. **145** (2008), no. 2, 341–378.

[B09] B. Berndtsson: *Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations.* Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 2, 531–560.

[BEGZ10] S. Boucksom, P. Eyssidieux, V. Guedj, and A. Zeriahi: *Monge–Ampère equations in big cohomology classes.* Acta Math. **205** (2010), no. 2, 199–262.

[BHJ15] S. Boucksom T. Hisamoto and M. Jonsson: *Uniform K-stability, Duistermaat-Heckman measures and singularities of pairs.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **67** no. 2 (2017), 743–841.

[BHJ16] S. Boucksom T. Hisamoto and M. Jonsson: *Uniform K-stability and asymptotics of energy functionals in Kähler geometry.* `arXiv:1603.01026`. to appear in J. Eur. Math. Soc..

[BJ17] H. Blum and M. Jonsson: *Thresholds, valuations, and K-stability.* `arXiv:1706.04548`

[BJ18] S. Boucksom and M. Jonsson: *A non-Archimedean approach to K-stability.* `arXiv:1805.11160`

[C85] E. Calabi: *Extremal Kähler metrics. II.* Differential geometry and complex analysis, 95–114, Springer, Berlin, 1985.

[CDS15] X.X. Chen, S. K. Donaldson and S. Sun: *Kahler-Einstein metrics on Fano manifolds, III: limits as cone angle approaches 2π and completion of the main proof.* J. Amer. Math. Soc. **28** (2015), 235–278.

[CHT17] T. C. Collins, T. Hisamoto and R. Takahashi: *The inverse Monge-Ampère flow and applications to Kähler-Einstein metrics.* `arXiv:1712.01685`.

[DR15] T. Darvas and Y. A. Rubinstein: *Tian's properness conjectures and Finsler geometry of the space of Kähler metrics.* J. Amer. Math. Soc. **30** (2017), no. 2, 347–387.

[D14] R. Dervan: *Uniform stability of twisted constant scalar curvature Kähler metrics.* Int. Math. Res. Not. IMRN 2016, no. 15, 4728–4783.

[DS17] R. Dervan, G. Székelyhidi: *The Kähler-Ricci flow and optimal degenerations.* `arXiv:1612.07299v4`.

[DT92] W. Y. Ding and G. Tian: *Kähler-Einstein metrics and the generalized Futaki invariant.* Invent. Math. **110** (1992), no. 2, 315–335.

[D02] S. K. Donaldson: *Scalar curvature and stability of toric varieties.* J. Differential Geom. **62** (2002), no. 2, 289–349.

[D05] S. K. Donaldson: *Lower bounds on the Calabi functional.* J. Differential Geom. **70** (2005), no. 3, 453–472.

[DS14] S. K. Donaldson and S. Sun: *Gromov-Hausdorff limits of Kähler manifolds and algebraic geometry.* Acta Math. **213** (2014), no. 1, 63–106.

[DS17] S. K. Donaldson and S. Sun: *Gromov-Hausdorff limits of Kähler manifolds and algebraic geometry, II.* J. Differential Geom. **107** (2017), no. 2, 327–371.

[D15] S. K. Donaldson: *The Ding functional, Berndtsson convexity and moment maps.* `arXiv:1503.05173v1`.

[EGZ11] P. Eyssidieux, V. Guedj, A. Zeriahi: *Viscosity solutions to degenerate complex Monge-Ampère equations.* Comm. Pure Appl. Math. **64** (2011), no. 8, 1059–1094.

[F90] A. Fujiki: *Moduli space of polarized algebraic manifolds and Kähler metrics.* [translation of Sûgaku 42 (1990), no. 3, 231–243; MR1073369]. Sugaku Expositions. Sugaku Expositions **5** (1992), no. 2, 173–191.

[F16] K. Fujita: *A valuative criterion for uniform K-stability of $\mathbb{Q}$-Fano varieties.* `arXiv:1602.00901`.

[F83] A. Futaki: *An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics.* Invent. Math. **73** (1983), no. 3, 437–443.

[H16] T. Hisamoto. *On the limit of spectral measures associated to a test configuration of a polarized Kähler manifold.* J. Reine Angew. Math. 713 (2016), 129–148.

[H16] T. Hisamoto. *Stability and coercivity for toric polarizations.* `arXiv:1610.07998`.

[K98] S. Kołodziej: *The complex Monge-Ampère equation.* Acta Math. **180** (1998), no.1, 69–117.

[K82] N. V. Krylov: *Boundedly inhomogeneous elliptic and parabolic equations.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), no. 3, 487–523.

[LX11] C. Li and C. Xu: *Special test configurations and K-stability of Fano varieties.* Ann. of Math. **180** (2014) no. 1, 197–232.

[M86] T. Mabuchi: *K-energy maps integrating Futaki invariants.* Tohoku Math. J. (2) **38** (1986), no. 4, 575–593.

[M01] T. Mabuchi: *Kähler-Einstein metrics for manifolds with nonvanishing Futaki character.* Tohoku Math. J. (2) **53** (2001), no. 2, 171–182.

[O12] Y. Odaka. *The Calabi conjecture and K-stability.* Int. Math. Res. Not. (2012), no. 10, 2272–2288.

[O13] Y. Odaka: *A generalization of Ross–Thomas' slope theory.* Osaka J. Math. **50**

(2013), no. 1, 171–185.

[PRS08] D. H. Phong, J. Ross, and J. Sturm: *Deligne pairings and the Knudsen-Mumford expansion.* J. Differential Geom. 78 (2008), no. **3**, 475–496.

[S06] G. Székelyhidi. *Extremal metrics and K-stability.* Ph.D Thesis. `arXiv:math/0611002`.

[S08] G. Székelyhidi: *Optimal test-configurations for toric varieties.* J. Differential Geom. **80** (2008), no. 3, 501–523.

[T97] G. Tian. *Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature.* Inv. Math. **130** (1997), 239–265.

[W12] X. Wang: *Heights and GIT weights.* Math. Res. Lett. **19** (2012), no. 4, 909–926.

[Y17] Y. Yao: *Mabuchi Metrics and Relative Ding Stability of Toric Fano Varieties.* `arXiv:1701.04016v2`.

[Y77] S. T. Yau: *Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **74** (1977), no. 5, 1798–1799.