作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

解析関数と複素微分：解答

解答例を読むだけではなく、もう一度、何も見ずに自力で解答が作成できるかどうか手を動かして確かめてください。

問題 1. 例えば、1 未満の実数 r を 10 進法で小数表示すると

$$r = a_0 + a_1\left(\frac{1}{10}\right) + a_2\left(\frac{1}{10}\right)^2 + a_3\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots$$

と書くことができる。$a_0, a_1, \ldots$ は 0 以上 10 未満の整数である。関数 $f(z)$ の点 $a \in \mathbb{C}$ における冪級数展開は

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \\ &= a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + a_3(z-a)^3 + \cdots \end{aligned}$$

という形をしている。$a_0, a_1, \ldots$ は複素数である。これらは共に数や関数の冪級数表示であり、高次の項は低次の項に比べて (点 a の近くで) 小さい寄与を持つ。

補足 1. このようにして見ると、Laurent 級数

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

を考えるのが自然である。負の冪を入れることで、勝手な実数 r の小数表示を与えられるからである。

問題 2. 正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-a)^n|$ に Cauchy-Hadamard の判定を適用する。$z \in \mathbb{B}(a, r)$ に対し

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n(z-a)^n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} |z-a| \leqslant \frac{r}{R} < 1$$

だから、この正項級数は有限の値に収束する。従って、Weierstrass の判定により、冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ は $\mathbb{B}(a, r)$ 上で一様に絶対収束する。

問題 3.

(1) 複素微分の定義に従って計算すればよい。

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = a_1 + a_2 z$$

は $z \to 0$ のとき a_1 に収束する。よって $f(z)$ は原点で複素微分可能である。

(2) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と極座標表示すると

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{\bar{z}}{z} = \cos 2\theta - i\sin 2\theta$$

となる。$z \to 0$ のとき、θ は自由に動くから、この極限は一意に定まらない。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(3) 合成関数の微分法の証明に立ち戻ればよい。$w = \frac{z}{1+z}$ とおけば

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{g(\frac{z}{1+z})-g(0)}{z-0} = \frac{g(w)-g(0)}{w-0}(1-w).$$

$z \to 0$ のとき $w \to 0$ だから、この極限は $g'(0)$ に収束する。

問題 4. $f(z)$ が $\mathbb{B}(a,r)$ で冪級数展開できたとする。まず、$f(z)$ は点 a において (複素微分可能なことから) 連続である。従って、

$$f(a) = \lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = a_0$$

となる。次に導関数を計算する。項別に微分して得られる級数 $\sum_{n=0}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1}$ の収束半径は変わらない (問題 2 の解答も参考にせよ) ので、勝手な $r' < r$ についてこの級数は $\mathbb{B}(a,r')$ 上で一様収束する。従って、極限と微分の交換が可能であり、

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1}$$

が成り立つ。同様の議論を繰り返すことで、

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} k!a_n(z-a)^{n-k}$$

を得る。特に各階の導関数は連続だから、

$$f^{(k)}(a) = \lim_{z\to a} f^{(k)}(z) = \lim_{z\to a}\sum_{n=k}^{\infty} k!a_n(z-a)^{n-k} = k!a_k$$

となる。

問題 5. 和と極限の交換が可能だから

$$0 \equiv f(z)+f(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+(-1)^n a_n)z^n$$

となる。さて、定理 1 より、冪級数展開可能な関数に対し各項の係数は一意的に決まる。だから、恒等的にゼロという関数を冪級数展開すれば、各項の係数はゼロでなければならない。よって、勝手な n に対し $a_n + (-1)^n a_n = 0$ が成り立つ。

問題 6. d'Alembert の判定と Weierstrass の判定により、勝手な $r > 0$ について $\mathbb{B}(0,r)$ 上 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ は一様収束する。ということは、定理 1 より、これは $\mathbb{C}$ 全域で正則な関数 $f(z)$ を定める。定理 2 より、この関数は $\mathbb{C}$ 内の勝手な円盤上で冪級数展開することができる。

作成者：久本 智之　研究室：A343 E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

定理 2 を使わない方法を考える。項別に微分して得られる級数は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

なので、元の級数と等しい。特に収束半径は変わらないので、極限と微分の交換が可能であり、

$$f'(z) = f(z)$$

が成り立つ。これは指数関数の微分方程式に他ならない。同様の議論を繰り返すことで、

$$f^{(n)}(z) = f(z)$$

を得る。よって、$z = a$ とすれば $f^{(n)}(a) = e^a$ となる。ということは、定理 1 に鑑みれば、$\mathbb{B}(a, r)$ 上の展開は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(z-a)^n$$

となるはずである。この等式をどうやって示すかだが、よく見るとこれは指数法則 $e^z = e^a e^{z-a}$ に他ならない。冪級数展開から直接に

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$$

を示すことは難しくない。「級数」の問題 11 を見よ。

問題 7.

(1) 複素微分の定義に従って計算すればよい。点 $a \in \Omega$ を固定し、$z = re^{i\theta}, a = r_0 e^{i\theta_0}$ $(0 < \theta, \theta_0 < 2\pi)$ と極座標表示すると、$z \to a$ のとき

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} - r_0^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta_0}{2}}}{re^{i\theta} - r_0 e^{i\theta_0}} = \frac{1}{r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} + r_0^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta_0}{2}}} \to \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

が成り立つ。よって導関数は $f'(z) = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}}$ となる。複素数には大小がないので、2 乗根を取り扱う際は偏角に注意しなければならない。さらに、

$$\frac{f'(z) - f'(a)}{z - a} = \frac{-1}{2\sqrt{z}\sqrt{a}} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{a}}{z - a} = \frac{-1}{2\sqrt{z}\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{a}} \to -\frac{1}{4} a^{-\frac{3}{2}}.$$

以下同様にして $f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!}{2^n} a^{-\frac{2n-1}{2}}$ を得る。定理 2 と定理 1 から、$a = -1$ の近傍で

$$\sqrt{z} = i\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{2^n n!} (z+1)^n\right)$$

という展開が得られる。ちゃんと $z = -1$ で $\sqrt{z} = i$ となっていること等に注意せよ。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(2) 仮に $f(z)$ が $\mathbb{C}$ 全体に正則に拡張できたとすると、それは連続関数なので、$z \to 1$ のとき $f(z)$ は一定の値 $f(1)$ に近づく。ところが、偏角を $0 < \theta < \delta, 2\pi - \delta < \theta' < 2\pi$ と取れば $\delta \to 0$ のとき

$$f(e^{i\theta}) = e^{i\frac{\theta}{2}} \to 1, \quad f(e^{i\theta'}) = e^{i\frac{\theta'}{2}} \to -1$$

なので、これはおかしい。

問題 8. 一次関数 $az+b, cz+d$ は各点で複素微分可能で、それらの商はやはり複素微分可能である。実際、関数 $f(z), g(z)$ が点 a で複素微分可能なら、$g(a) \neq 0$ である限り

$$\begin{aligned} \frac{\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{z-a} &= \frac{1}{g(z)g(a)}\left(\frac{f(z)-f(a)}{z-a}g(a) - f(a)\frac{g(z)-g(a)}{z-a}\right) \\ &\to \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2} \quad (z \to a) \end{aligned}$$

となる。まず、原点における展開は

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{cd}\frac{1}{1+\frac{c}{d}z} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{cd}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{c}{d}\right)^n z^n$$

で与えられる。右辺に現れた冪級数は勝手な $r < \left|\frac{d}{c}\right|$ に対し $\mathbb{B}(0,r)$ で一様収束している。すると、一般の点 z_0 の近傍における展開は

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{cz+d} &= \frac{a(z-z_0)+az_0+b}{c(z-z_0)+cz_0+d} \\ &= \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cz_0+d)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{c}{cz_0+d}\right)^n (z-z_0)^n \end{aligned}$$

となる。右辺に現れた冪級数は勝手な $r < \left|z_0 + \frac{d}{c}\right|$ に対し $\mathbb{B}(z_0,r)$ で一様収束している。

問題 9.

(1) d'Alembert の判定と Weierstrass の判定を用いれば、$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ が勝手な $r > 0$ に対し $\mathbb{B}(0,r)$ 上で一様収束することが分かる。定理 1 によりこれは全平面で正則な関数を定める。

(2) 逆関数の微分法により

$$g'(w) = \frac{1}{f'(z)}$$

が成り立つ。仮に

$$g'(w) = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots$$

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

と展開できたとすると、

$$\begin{aligned}1 &= f'(z)\frac{1}{f'(z)}\\ &= \left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\cdots\right)\left(a_0+a_1f(z)+a_2f(z)^2+a_3f(z)^3+\cdots\right)\\ &= \left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\cdots\right)\left(a_0+a_1z+a_2z^2+\big(-\frac{1}{6}a_1+a_3\big)z^3+\big(-\frac{1}{3}a_2+a_4\big)z^4+\cdots\right)\end{aligned}$$

だから、係数は帰納的に決まる。最初の方を計算すると

$$a_0=1,\quad a_1=0,\quad a_2=\frac{1}{2},\quad a_3=0,\quad a_4=\frac{3}{8},\ldots$$

となる。

もっと良いのは、逆関数の微分法を使った時点でさらに

$$f'(z)=\cos z=\sqrt{1-w^2} \tag{$*$}$$

と計算しておいて、展開

$$\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}w^{2n}$$

を利用することである。この冪級数は「一様収束」の問題 2 で扱った。

$(*)$ の計算に当たっては色々と注意すべきことがある。まず、関係式

$$\sin' z=\cos z,\quad \cos^2 z+\sin^2 z=1$$

を使っているから、冪級数による定義

$$\cos z:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n!}z^{2n},\quad \sin z:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1},$$

に基づいてこれらの公式を示す必要がある。$\sin' z=\cos z$ は項別微分で確かめられる。$\cos^2 z+\sin^2 z=1$ の方は、$e^{iz}=\cos z+i\sin z$ と $e^{z+w}=e^ze^w$ を経由すれば確かめられる。

もう一つ気をつけるべきは、$\sqrt{1-w^2}$ における 2 乗根の定義である。今は原点の近傍だけを問題にしているから、$|w|$ は十分小さいとしてよい。とすると $1-w^2=:re^{i\theta}$ の偏角 θ は $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ を満たすように取れるので、$\sqrt{1-w^2}:=r^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}$ は問題なく定義できている。2 乗根としては他に $r^{\frac{1}{2}}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$ があるが、$|z|<\frac{1}{2}$ なら $|1-\cos z|<1$ だから、$\cos^2 z=1-\sin^2 z=1-w^2$ のとき $\cos z=\sqrt{1-w^2}$ を満たす 2 乗根は $r^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}$ の方である。

作成者： 久本 智之　研究室： A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 10.

(1) $a = x_0 + y_0 i$ とおくと

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z}(a)(z-a) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)(x+yi-(x_0+y_0 i)) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a) + \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(a) + i\frac{\partial v}{\partial y}(a)\right)\right)(x+yi-(x_0+y_0 i)) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(a) + \frac{\partial v}{\partial y}(a)\right)(x-x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(a) - \frac{\partial v}{\partial x}(a)\right)(y-y_0) \\
&\quad + i\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}(a) + \frac{\partial v}{\partial x}(a)\right)(x-x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(a) + \frac{\partial v}{\partial y}(a)\right)(y-y_0)\right].
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\overline{(z-a)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(a) - \frac{\partial v}{\partial y}(a)\right)(x-x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(a) + \frac{\partial v}{\partial x}(a)\right)(y-y_0) \\
&\quad + i\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(a) + \frac{\partial v}{\partial x}(a)\right)(x-x_0) + \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}(a) + \frac{\partial v}{\partial y}(a)\right)(y-y_0)\right]
\end{aligned}$$

が成り立つ。これらの和と、Taylor の近似式

$$\begin{aligned}
f(z) = u(x,y) + v(x,y)i &= u(a) + \frac{\partial u}{\partial x}(a)(x-x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(a)(y-y_0) + o(|z-a|) \\
&\quad + i\left[v(a) + \frac{\partial v}{\partial x}(a)(x-x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(a)(y-y_0) + o(|z-a|)\right]
\end{aligned}$$

を比較すれば

$$f(z) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial z}(a)(z-a) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\overline{(z-a)} + o(|z-a|)$$

を得る。なお、複素関数 $g(z)$ について Landau の記号 $g(z) = o(|z-a|)$ は

$$\lim_{z\to a}\frac{|g(z)|}{|z-a|} = 0$$

の意味で用いている。

(2) (1) の両辺を $z-a$ で割れば

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \frac{\partial f}{\partial z}(a) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\left(\frac{\overline{z-a}}{z-a}\right) + \frac{o(|z-a|)}{z-a}$$

となるが、$z \to a$ のとき右辺第 3 項はゼロに収束し、$\frac{\partial f}{\partial z}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)$ は定数で、$\frac{\overline{z-a}}{z-a}$ は $z = a$ で複素微分可能でない (このことは問題 3(2) で確かめた)。よって、$z \to a$ のとき左辺の極限が存在することと、$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$ となることは同値である。