作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

解析関数と複素微分

実施日：July 10, 2018

- 来週は休講です。再来週は復習回なので、過去の問題を解いて発表する準備をしておいてください。
- これまでの問題を解き直した人は、8 月 10 日までにレポート箱に提出してください。5 個、10 個と問題を解くごとに若干の加点をします。解答例の丸写しは評価しません。添削したレポートは 8 月 20〜31 日のあいだ支援室に預けるので、受け取ってください。

解析関数

定義 1. 複素平面内の領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ で定義された関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ で次の性質を満たすものを**解析関数** (analytic function) という。

勝手な点 $a \in \Omega$ に対し、ある円盤 $\mathbb{B}(a,r) \subset \Omega$ の上で一様に絶対収束する冪級数が存在して、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

と書ける。

問題 1. いわゆる位取り記数法との類似について説明せよ。

問題 2. 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ に対し

$$R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} \in [0,\infty]$$

を**収束半径**という。勝手な $r < R$ に対し $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ は $\mathbb{B}(a,r)$ 上で一様に絶対収束することを示せ。

解析関数は複素微分可能である

定義 2. 複素平面内の領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ で定義された複素数値関数 $f(z)$ が点 $a \in \Omega$ で**複素微分可能**とは、極限

$$\frac{df}{dz}(a) := \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

が存在することである。右辺は複素数の割り算であり、$z \to a$ は複素数の収束であることに注意。
微分係数 $\dfrac{df}{dz}(a)$ を $f'(a)$ や $f^{(1)}(a)$ と略記し、n 階導関数を $f^{(n)}(z)$ で表す。Ω の各点で 1 階複素微分可能な関数を**正則関数** (holomorphic function) という。

作成者： 久本 智之　研究室： A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 3. (発表課題) 次の関数が原点において複素微分可能であるか判定せよ。

(1) $f(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \quad (a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C})$

(2) $f(z) := \overline{z}$

(3) $g(z)$ が原点で複素微分可能であるとき、$f(z) := g(\frac{z}{1+z})$

定理 1. $\mathbb{B}(a, r) \subset \Omega$ で一様収束する冪級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

は何回でも複素微分可能であり、各係数は

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

で与えられる。特に解析関数は正則関数である。

補足 1. 定理 1 の前半部分は、一様収束と微分の交換が可能であるという事実 (演習でいうと一様収束の回の解答例で紹介した定理) から従う。項別微分しても冪級数の収束半径は変わらないから。

問題 4. 定理 1 の後半を示せ。つまり、複素微分可能な $f(z)$ が $\mathbb{B}(a, r) \subset \Omega$ において

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

と展開できたならば、必然的に $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ となることを示せ。

問題 5. $\mathbb{C}$ 上定義された解析関数が奇関数、すなわち $f(-z) = -f(z)$ を満たすならば、原点の近傍における展開

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

の偶数次の項はゼロになることを示せ。

問題 6. $\mathbb{C}$ 上定義された関数

$$f(z) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{|z|^2}} & \text{if} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{if} \quad z = 0 \end{cases}$$

は解析関数ではない。理由を説明せよ。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

複素微分可能ならば解析的である

複素微分可能性は極めて強い条件である。

定理 2. Ω 上の正則関数は勝手な $\mathbb{B}(a,r)\subset\Omega$ で冪級数展開できる。特に、正則関数は解析関数となり、何回でも複素微分できる。

補足 2. この定理は **Cauchy の積分公式**から従う。$\mathbb{B}(a,r)$ は Ω に入ってさえいればいくら大きくてもよい！Ahlfors の教科書のように、複素微分可能な関数のことを解析関数と呼ぶ人もいるので注意。

問題 7. 指数関数

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

は $\mathbb{C}$ 全域で解析関数を定める。まず定理 2 を用いてこのことを示せ。次に定理 2 を使わずに直接このことを示せ。

問題 8. (発表課題) 複素数 $z=re^{i\theta}$ で $r>0,\ 0<\theta<2\pi$ となるもの全体を Ω とする。

(1) $f(z)=\sqrt{z}:=r^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}$ は Ω 上の正則関数を定めることを示せ。さらに、点 -1 のまわりでの冪級数展開を求めよ。

(2) $f(z)$ は $\mathbb{C}$ 全域の正則関数に拡張できないことを示せ。

問題 9. $a,b,c,d\in\mathbb{C}, ad-bc\neq 0$ のとき、

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

は $\Omega:=\{z\in\mathbb{C}: z\neq-\frac{d}{c}\}$ で正則関数になることを説明し、各点の近傍における冪級数展開を求めよ。

補足 3. 実は、一次分数変換は Riemann 球面から Riemann 球面への "正則写像" を与える。

問題 10. 正弦関数を

$$f(z)=\sin z:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

によって定義する。

(1) これは $\mathbb{C}$ 全域で正則な関数を定めることを示せ。

(2) 正弦関数を $z\in\mathbb{C}$ を $w=f(z)\in\mathbb{C}$ に移す写像と見なしたとき、原点 $w=0$ の近傍で逆関数 $g(w)$ が存在し、正則になることが知られている。逆関数の微分法を利用して、$g(w)$ の原点近傍における冪級数展開を 4 次の項まで求めよ。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 11. 複素数値 C^1 級関数 $f(z)$ を $z = x + yi$ の実部 x, y についての関数と見て、$f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$ と書く。まず、x, y についての偏微分を

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} i$$

と定義する。次に、微分作用素 $\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ を

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

と定義する。

(1) 実 C^1 級関数に対する Taylor の定理を用いて、一次近似

$$f(z) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial z}(a)(z - a) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a)\overline{(z - a)} + o(|z - a|)$$

が成り立つことを示せ。

(2) (1) を利用して、C^1 級関数 f が正則であることと各点で $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ を満たすことは同値であることを示せ。

※このように正則関数とは $\overline{z}$ に依らない純粋に z のみについての関数であると「解釈」することができるが、z と $\overline{z}$ **は互いに独立な変数ではない**から注意しなければならない。