作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

複素数と一次分数変換：解答

解答例を読むだけではなく、もう一度、何も見ずに自力で解答が作成できるかどうか手を動かして確かめてください。

問題 1. どういうことが問題になっているかというと、2 乗して -1 になる数として、もし A さんが i を、B さんが $-i$ を選んでしまった場合、二人の間に混乱は生じないのかということである。ここで共役複素数の性質

- $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$

を思い出す。これらの性質は、z を $\overline{z}$ に移す写像 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が四則演算を保つことを意味する。(演算を保つこのような全単射のことを**同型写像**という。) だから、A さんの計算結果と B さんの計算結果が違っても、それらは常に複素共役を取る操作で相互に翻訳可能なため、混乱は生じない。i と $-i$ を区別することは**できない**が、それでも困らないというのが答えである。

問題 2. 計算は単純で、

$$
\begin{aligned}
f((a+bi)+(c+di)) &= f((a+c)+(b+d)i)) \\
&= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \\
&= f(a+bi) + f(c+di)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f((a+bi)(c+di)) &= f((ac-bd)+(ad+bc)i)) \\
&= \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \\
&= f(a+bi)f(c+di)
\end{aligned}
$$

となることが確かめられる。K は実数を成分とする行列の集合だから、これは実数だけを用いて複素数を構成したことになっている。(実数の完備性の回で見たように、その実数は、有理数だけを用いて構成できるのだった。)

問題 3. 複素数 z と w の和 $z+w$ は、$0, z, w$ を頂点に持つ平行四辺形の残りの頂点に対応する。複素数 z に w に掛けることは、z の長さ $|z|$ を $|w|$ 倍し、角度 $\arg z$ に $\arg w$ を加えることに相当する。

このことから、6 乗して 1 になる複素数は単位円周の 6 等分点を成すことが分かる。このうち 6 乗して初めて 1 になるものは、偏角が $\pm\frac{\pi}{3}$ のもの 2 つだけである。演算の幾何学

作成者：久本 智之　研究室：**A343**　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

的意味を考えれば 2 つ数の和は $1 \in \mathbb{C}$, 積は $1 \in \mathbb{C}$ であることが分かる。根と係数の関係により、求める多項式は $x^2 - x + 1$ である。

($x^6 - 1$ を因数分解しても $x^2 - x + 1$ が得られるが、ここでは演算の幾何学的意味に注目した。)

問題 4. $z = re^{i\theta}$ と極座標表示したとき、

$$\log z := \log r + \theta i$$

とおく。θ を $\theta + 2\pi$ に取り替えても z の値は変わらないが、$\log z$ の値は $2\pi i$ だけズレてしまう。

問題 5. $z = e^{i\theta}$ と極座標表示すれば

$$|az + b\overline{z}| = a\left|1 + \frac{b}{a}e^{-2i\theta}\right|.$$

これは $\theta = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ のとき最大値 $a + b$ を, $\theta = (n + \frac{1}{2})\pi$ のとき最小値 $|a - b|$ を取る。

問題 6.

(1) 直線上の点を z とすると $z - \alpha$ は $z - \beta$ と偏角を同じくするから、掛け算の幾何学的意味を考えれば $\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ は偏角ゼロ、すなわち実数である。

(2) α, β, γ はこの順番に時計回りあるいは反時計回りに円周上に配置されているとする。円周上の点を z とする。掛け算の幾何学的意味を考えれば、$\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ の偏角は、β, z, α を頂点とする三角形の頂点 z における角度に (向きを込めて) 等しい。円周角の定理により、$\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ は $\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}$ と偏角を同じくするから、掛け算の幾何学的意味を考えれば $\frac{z-\alpha}{z-\beta}\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}$ は偏角ゼロ、すなわち実数である。

α, β, γ がこの順番に配置されていないときは複比の形に修正が必要である。

問題 7.

(1) $\frac{1}{z}$ は長さが $\frac{1}{|z|}$, 偏角が $-\arg z$ で与えられる複素数である。

(2) 問題 6 より、広義円は適当な α, β, γ を用いて $\{z \in \mathbb{C} : R(\alpha, \beta : z, \gamma) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$ と表せる。α, β, γ はいずれも 0 でないとしてよい。このとき、

$$\text{広義円が直線} \iff \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha} \in \mathbb{R} \iff \text{広義円が無限遠点} \infty \text{を含む}$$

が成り立っていることに注意せよ。反転を写像 $f \colon \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と見做すと $f(z) = \frac{1}{z}$ で、

$$R(f(\alpha), f(\beta) : f(z), f(\gamma)) = R(\alpha, \beta : z, \gamma)$$

が成り立つ。従って、広義円 $\{z \in \mathbb{C} : R(\alpha, \beta : z, \gamma) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$ の f による像は広義円 $\{w \in \mathbb{C} : R(f(\alpha), f(\beta) : w, f(\gamma)) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$ に含まれる。f が全単射なので、広義円は広義円に 1 対 1 に移っている。広義円が原点を通るならば、反転による像は無限遠点を含むから直線になる。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 8. $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $\psi(z) = \dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}$ とすると

$$(\psi\circ\varphi)(z) = \frac{a'\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)+b'}{c'\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)+d'} = \frac{(a'a+b'c)z+(a'b+b'd)}{(c'a+d'c)z+(c'b+d'd)}$$

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a+b'c & a'b+b'd \\ c'a+d'c & c'b+d'd \end{pmatrix}$$

が成り立つ。この 2 つの式を比べると、一次分数変換の合成は行列の積に対応していることが分かる。特に行列式を考えると、$(a'a+b'c)(c'b+d'd)-(c'a+d'c)(a'b+b'd) = (a'd'-b'c')(ad-bc) \neq 0.$ 逆変換は逆行列に対応する。

問題 9.

(1) 三角形 abc と $a'b'c'$ が合同で、各頂点 a, b, c は a', b', c' に対応しているとする。まず a を a' に移す平行移動を行い、次に a' を中心として b を b' に重なるよう回転させる。このとき c は c' に重なるか、あるいは $a'b'$ を挟んで鏡映の位置にある。必要ならさらに鏡映変換を施すことにより、abc は $a'b'c'$ に移せる。

※一次分数変換の幾何学においては、複素数 z に反転の共役 $\frac{1}{\bar{z}}$ を対応させる写像が鏡映変換に相当する。単位円周が鏡映の軸に相当する。

(2) 複素数を使えば、平行移動は $z+a$, 回転と拡大は $re^{i\theta}z$, 反転は $\frac{1}{z}$ という一次分数変換でそれぞれ表せる。問題 8 により一次分数変換の合成は一次分数変換だったから、これらの合成もまた適当な一次分数変換で表すことができる。逆に、勝手な一次分数変換は

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{-(ad-bc)}{c^2}\frac{1}{z+\frac{d}{c}}$$

と表せる。右辺は平行移動、反転、回転、拡大、平行移動を順に合成したものである。さらに、例えば $bc=-1$ のとき

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{z+a}+b}+c} = \frac{b}{c}z + \frac{ab+1}{c}$$

が成り立つので、回転と拡大は反転と平行移動の合成で書ける。結局、一次分数変換は $\frac{1}{z+a}$ という形をした変換の合成で書ける。上の証明から、それぞれの一次分数変換についてそのような変換は 8 個用意すればよいことも分かる。(これは最良だろうか？)

問題 10.

(1) 求める一次分数変換は1つしかなく、$\dfrac{z-i}{z+i}$ である。「i が0に移るのだから分子は $z-i$ の定数倍のはず、$-i$ が ∞ に移るのだから分母は $z+i$ の定数倍のはず......」という風に考えればよい。

※一次分数変換 $\dfrac{az+b}{cz+d}$ の a,b,c,d を一斉に定数倍したものは同じ写像を定める。

(2) (1) と同じように考えると、3点 α,β,γ を $0,1,\infty$ に移す一次分数変換は

$$\psi\colon z \mapsto \frac{z-\alpha}{z-\gamma}\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}$$

に限る。同様に、3点 α',β',γ' を $0,1,\infty$ に移す一次分数変換を ψ' と書く。α,β,γ を α',β',γ' に移す一次分数変換を $\varphi\colon \mathbb{C}\cup\{\infty\}\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ とすると、φ に ψ' を合成して得られる一次分数変換 $\psi'\circ\varphi$ は α,β,γ を $0,1,\infty$ に移す。先に述べたように、このようなものは ψ しかない。すると、$\psi'\circ\varphi=\psi \Leftrightarrow \varphi=(\psi')^{-1}\circ\psi$ となり、φ は1つに定まってしまう。

(3) (2) と同じ記号を使う。$\varphi := (\psi')^{-1}\circ\psi$ とすればこれは α,β,γ を α',β',γ' に移す一次分数変換である。

問題 11.

(1) 原点を $\mathrm{O}=(0,0,0)$, 北極点を $\mathrm{N}=(0,0,1)$, 南極点を $\mathrm{S}=(0,0,-1)$ とする。複素数 $z=x+yi$ と $\mathbb{R}^3$ の点 $\mathrm{Z}=(x,y,0)$ を同一視する。線分 ZN と単位球面 $\mathbb{S}^2$ の交点を P, P から NS に降ろした垂線の足を H とする。NZ の長さは $\sqrt{1+|z|^2}$ で、三角形 ZNO と SNP は相似だから PS の長さは $\frac{2|z|}{\sqrt{1+|z|^2}}$. さらに SPH も相似だから PH の長さは $\frac{2|z|}{1+|z|^2}$, HS の長さは $\frac{2|z|^2}{1+|z|^2}$, となる。この計算は $|z|>1$ でも $|z|<1$ でも、あるいは $|z|=1$ でも全く変わらない。以上で $\mathrm{P}=p(z)$ の座標が決定できた。

(2) 複素数 $w=u+vi$ と $\mathbb{R}^3$ の点 $\mathrm{W}=(u,v,0)$ を同一視し、線分 WS と単位球面 $\mathbb{S}^2$ の交点を Q とすると、(1) と同様に $\mathrm{Q}=q(z)$ の座標が決定できる。その結果は

$$q(w)=\left(\frac{2u}{1+|w|^2},\frac{2v}{1+|w|^2},\frac{1-|w|^2}{1+|w|^2}\right)$$

となる。よって $p(z)=q(w)\Leftrightarrow w=\frac{1}{z}$ が成り立つ。

(3) $\mathbb{C}$ の円 C を1つ取り、固定する。中心が原点と一致する場合は簡単である。一般の場合は、C の中心と原点を通る直線を取り、この直線と C の交点を $\mathrm{Z}_0,\mathrm{Z}_1$ とする。$\mathrm{Z}_0,\mathrm{Z}_1$ の立体射影による像を $\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1$ とすると、これらは同一の平面 H 上にあり、

三角形 $\mathrm{NZ}_0\mathrm{Z}_1$ と三角形 $\mathrm{NP}_1\mathrm{P}_0$ は相似である。

作成者：久本 智之 研究室：A343 E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

このことを用いて、C を底とし N を頂点とする円錐と $\mathbb{S}^2$ との交わりが円になることを示す。円錐と $\mathbb{S}^2$ との交点 P を自由に取ったとき、P から $\mathrm{P_0P_1}$ に降ろした垂線の足を R として

$$|\mathrm{PR}|^2 = |\mathrm{P_0R}| \cdot |\mathrm{P_1R}|$$

が成り立つことを示せばよい。R を通り xy 平面に並行な平面と今考えている円錐の交わりは円になるから、これと比べる。この円周には点 P が乗っていることに注意せよ。この円周と平面 H の交点を $\mathrm{Q_1, Q_2}$ とする。$\mathrm{N, Z}_i, \mathrm{P}_i, \mathrm{Q}_i$ $(i = 0, 1)$ は同じ直線上にある。三角形 $\mathrm{NZ_0Z_1}$ と三角形 $\mathrm{NP_1P_0}$ が相似だから、三角形 $\mathrm{P_0HQ_0}$ と $\mathrm{P_1HQ_1}$ も相似である。従って $|\mathrm{PH}|^2 = |\mathrm{Q_0H}| \cdot |\mathrm{Q_1H}|$ から $|\mathrm{PR}|^2 = |\mathrm{P_0R}| \cdot |\mathrm{P_1R}|$ が導かれる。

円でなく直線を立体射影で移す場合はもっと簡単である。直線上の点 Z を動かしたとき直線 NZ は空間内の平面を掃き、この平面と $\mathbb{S}^2$ の交わりは (平面の方程式と球の方程式を連立させれば) 円となることが直ちに分かる。

$\mathbb{S}^2$ 上の円は $\mathbb{R}^3$ 内の平面との交わりとして得られるから、平面の方程式を立体射影で引き戻して広義円の方程式を出してもよい。

問題 12. この問題は因数分解をする部分がやや難しいが、一次分数変換の応用例として挙げてみた。$pz^3 + qz^2 + rz + s = 0$ に $z = \dfrac{aw + b}{cw + d}$ を代入すると、3 次方程式は

$$Pw^3 + Qw^2 + Rw + S = 0$$

に変換される。ここで各係数は

$$\begin{aligned}
P &= pa^3 + qa^2c + rac^2 + sc^3 \\
Q &= 3pa^2b + qa^2d + 2qabc + 2racd + rbc^2 + 3sc^2d \\
R &= 3pab^2 + 2qabd + rad^2 + qb^2c + 2rbcd + 3scd^2 \\
S &= pb^3 + qb^2d + rbd^2 + sd^3
\end{aligned}$$

と書ける。$Q = 0$ とするには

$$d = -b\frac{3pa^2 + 2qac + rc^2}{qa^2 + 2rac + 3sc^2}$$

となっていればよいことが分かる。このとき、R の式から d を消去し、分子を a についての 5 次式と見て因数分解すれば

$$R = 3b^2\frac{pa^3 + qa^2c + rac^2 + sc^3}{qa^2 + 2rac + 3sc^2}\big((3pr - q^2)a^2 + (9ps - qr)ac + (3qs - r^2)c^2\big)$$

となる。従って、さらに $R = 0$ とするには

$$(3pr - q^2)\left(\frac{a}{c}\right)^2 + (9ps - qr)\left(\frac{a}{c}\right) + (3qs - r^2) = 0$$

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

であればよく、このとき方程式の解は

$$z = \frac{aw+b}{cw+d}, \quad w = -\left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{3}} = -\left(\frac{pb^3+qb^2d+rbd^2+sd^3}{pa^3+qa^2c+rac^2+sc^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

によって与えられる。

補足 1. 4次方程式まではこのような解の公式が存在する。すなわち、多項式の係数から始めて四則演算と累乗根を取る操作を有限回繰り返すことで解に到達できる。Galois 理論によれば、一般の 5 次方程式はこのような解の公式を持たない。一方で、超幾何関数などを用いると 5 次方程式の解も明示的に書くことができる。