作成者：久本 智之　研究室：A343 E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

複素数と一次分数変換

実施日：July 3, 2018

複素数の無謬性と構成

問題 1. 2 乗して -1 になる数は i と $-i$ の 2 つがある。複素数には大小関係が与えられていないのでこの 2 つを区別することはできないように見えるが、なぜ 1 つに決まらないのに片方を i と書いていて問題が生じないのか。

問題 2. 行列から成る集合

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

を考える。写像 $f\colon \mathbb{C} \to K$ を

$$f(a+bi) := \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

と定めると、これは全単射で、

$$f((a+bi)+(c+di)) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}, \quad f((a+bi)(c+di)) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ。これによって複素数体 $\mathbb{C}$ が構成できていることを説明せよ。行列 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を**複素構造**という。

複素数の演算と幾何学的意味

問題 3. (発表課題)　6 乗して初めて 1 になる複素数は 2 つあることを示せ。この 2 つをちょうど根に持つ多項式を求めよ。

問題 4. 複素数 z の極座標表示によって $\log z$ を定義し、これが多価関数であることを説明せよ。

問題 5. $a, b > 0$ を固定して $|z| = 1$ なる複素数 $z \in \mathbb{C}$ を動かしたとき、$|az + b\bar{z}|$ の最大値・最小値を求めよ。

> **例題 1.**　相異なる複素数 α, β, γ が正三角形を成すための必要十分条件を α, β, γ についての代数的な関係式で表せ。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

【解答】 $\xi = \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ とおく。ξ を掛けることは、複素平面上の点を時計回りないし反時計回りに 60 度回転する変換に対応する。よって α, β, γ が正三角形であるためには、

$$\begin{aligned}\beta - \gamma = \xi(\alpha - \gamma) \;&\Leftrightarrow\; \left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\right)^2 - \left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\right) + 1 = 0\\ &\Leftrightarrow\; \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha = 0\end{aligned}$$

となることが必要かつ十分。問題 3 も参照せよ。

問題 6. (発表課題)

(1) 複素平面上の相異なる 2 点 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ を通る直線は

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \overline{\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right)} = \frac{z-\alpha}{z-\beta} \right\}$$

と書けることを説明せよ。ただし、$z = \beta$ のときは $\infty = \infty$ として等号が成立していると考えることにする。

(2) 複素平面上の相異なる 3 点 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ を通る円または直線は

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \overline{\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\right)} = \left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\right) \right\}$$

と書けることを説明せよ。ただし、α, β, γ はこの順番に時計回りあるいは反時計回りに円周上配置されているとする。$R(\alpha, \beta : z, \gamma) = \dfrac{z-\alpha}{z-\beta}\dfrac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}$ を**複比**という。

問題 7. (発表課題) 複素数 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し $\dfrac{1}{z}$ を対応させる写像を**反転**という。

(1) z と $\dfrac{1}{z}$ の幾何学的な位置関係を説明せよ。

(2) 複素平面上の円ないし直線のことを**広義円**と呼ぶ。反転が広義円を広義円に移すことを示せ。

一次分数変換

定義 1. $ad - bc \neq 0$ を満たす複素数 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ に対し、

$$\varphi(z) := \frac{az+b}{cz+d}$$

によって定まる写像 $\varphi \colon \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を**一次分数変換**という。ここで形式的な点 ∞ を加えたのは、$\varphi(\frac{-d}{c}) := \infty$, $\varphi(\infty) := \frac{a}{c}$ と考えるためである。点 ∞ のことを**無限遠点**という。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 8. 一次分数変換 φ, ψ に対し、写像の合成 $\psi \circ \varphi$ も一次分数変換になることを示せ。さらに、逆写像 φ^{-1} も一次分数変換になることを示せ。写像の合成と、行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の掛け算とを比較せよ。

問題 9. (提出課題)

(1) 平面上の平行移動・回転・鏡映変換の合成は、合同な三角形を合同な三角形に移す。逆に、合同な 2 つの三角形は平行移動・回転・鏡映変換の合成で移りあうことを示せ。(本当は鏡映変換だけで足りる)

(2) 平行移動・回転・拡大・反転の合成は一次分数変換になる。逆に、任意の一次分数変換は平行移動・回転・拡大・反転の合成で表せることを示せ。特に、問題 7 より、一次分数変換は任意の広義円を広義円に移す。

問題 10.

(1) 点 $i, \infty, -i$ を $0, 1, \infty$ に移す一次分数変換を求めよ。

(2) 一次分数変換は相異なる 3 点の行き先で一意的に決まることを示せ。(ヒント: 3 点の行き先が $0, 1, \infty$ の場合をまず考える)

(3) 与えられた 3 点を別の 3 点に移す一次分数変換が必ず存在することを示せ。

問題 11. (提出課題) $\mathbb{R}^3$ の点 $(x, y, 0)$ と複素数 $z = x + yi$ を同一視する。

(1) 複素数 z と北極点 $(0, 0, 1)$ を結ぶ直線が単位球面 $\mathbb{S}^2$ と交わる点は

$$p(z) := \left(\frac{2x}{1 + |z|^2}, \frac{2y}{1 + |z|^2}, -\frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} \right)$$

で与えられることを示せ。$p\colon \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{S}^2$ を**立体射影**という。これによって $\mathbb{S}^2$ と同一視された $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ のことを **Riemann 球面**と呼ぶ。

(2) 複素数 w と南極点 $(0, 0, -1)$ を結ぶ直線が単位球面 $\mathbb{S}^2$ と交わる点を $q(w)$ とする。

$$p(z) = q(w) \ \Leftrightarrow \ w = \frac{1}{z}$$

を示せ。(つまり反転は南極側への座標変換と思える。)

(3) p によって、$\mathbb{C}$ の広義円は $\mathbb{S}^2$ 上の円に対応することを示せ。

問題 12. $p, q, r, s \in \mathbb{C}$ を係数に持つ 3 次方程式

$$pz^3 + qz^2 + rz + s = 0$$

を考える。一次分数変換

$$z = \frac{aw + b}{cw + d}$$

を適当に選ぶことで、これを w についての 3 次方程式 $Pw^3 + S = 0$ に帰着せよ。この議論によって 3 次方程式の解の公式を導け。