作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

一様収束：解答

解答例を読むだけではなく、もう一度、何も見ずに自力で解答が作成できるかどうか手を動かして確かめてください。

問題 1.

(1) 点 $x \in \mathbb{R}$ と、勝手な $\varepsilon > 0$ を固定する。$N \geqslant x$ となる自然数 N が取れる。すると、$\forall n \geqslant N$ に対し

$$|f_n(x) - f(x)| = |0 - 0| < \varepsilon$$

だから、$f_n(x)$ は $f(x) \equiv 0$ に各点収束している。

一方、$\varepsilon < 1$ に対し

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; x < n$$

だから、全ての $x \in \mathbb{R}$ に対し一律にこれを満たすような n は 1 つも存在しない。よって $f_n(x)$ は一様収束しない。

(2) $|z| \leqslant R$ ならば $|1 - z| \geqslant 1 - R$ なので

$$|f_n(z) - f(z)| = \left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} - \frac{1}{1 - z} \right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} \leqslant \frac{R^{n+1}}{1 - R}.$$

最右辺は z に依らない。$N \geqslant \log_R((1 - R)\varepsilon)$ とすれば、$n \geqslant N$ のとき任意の $|z| \leqslant R$ に対し $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ が成り立つ。つまり $f_n(z)$ は $f(z)$ に一様収束する。

問題 2. 関数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ に Taylor の定理を適用すると、$-R \leqslant x \leqslant R$ に対し

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1 - x}} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k - 1)!!}{(2k)!!} x^k + \frac{(2n + 1)!!}{(n + 1)(2n + 2)!!} \int_0^x (1 - t)^{-n-\frac{3}{2}} (x - t)^n dt
\end{aligned}$$

となる。剰余項を評価しよう。(この種の議論に慣れていない人は、まず問題 9 とその解答例を見よ。) 変数変換により、積分を

$$\int_0^x (1 - t)^{-n-\frac{3}{2}} (x - t)^n dt = x^{n+1} \int_0^1 (1 - xs)^{-n-\frac{3}{2}} (1 - s)^n ds$$

と書き換える。すると $|1 - s| \leqslant |1 - xs|$ なので、剰余項は

$$\left| \frac{(2n + 1)!!}{(n + 1)(2n + 2)!!} \int_0^x (1 - t)^{-n-\frac{3}{2}} (x - t)^n dt \right| \leqslant (1 - R)^{-\frac{3}{2}} R^{n+1}$$

と押さえられる。従って、$R < 1$ のとき一様収束

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2k - 1)!!}{(2k)!!} x^k \to \frac{1}{\sqrt{1 - x}}$$

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

が成り立つ。$-R \leqslant x \leqslant R$ のとき $0 \leqslant x^2 \leqslant R^2 < 1$ だから、x を x^2 に置き換えれば、一様収束

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^{2k} \to \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

が得られる。

次に Weierstrass の判定を用いて一様収束を確かめる。

$$\left| \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^{2k} \right| \leqslant \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} R^{2k}$$

なので、$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} R^{2n} < \infty$ ならばよい。正項級数に対する d'Alembert の判定を思い出すと

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} R^{2n+2}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} R^{2n}} = R^2 < 1$$

だから確かに $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} R^{2n} < \infty$ となる。

Taylor の定理に関する剰余項の評価は一般に難しい。上の解答からも、Weierstrass 判定の強力さが見て取れる。

問題 3. 定義域 X の点 $a \in X$ と勝手な $\varepsilon > 0$ を取り、a に十分近い x について $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つことを示す。まず、f_n が f に一様収束することから、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し任意の $n \geqslant N$, $x \in X$ について $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ となる。このような n を 1 つ選び、固定する。f_n は連続関数だから、ある $\delta > 0$ が存在して $|x - a| < \delta$ に対し $|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ が成り立つ。この δ は n および a に依存していることに注意せよ。

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

だから、f が a で連続なことが確かめられた。

問題 4. $f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k, f(t) = \dfrac{1}{1+t}$ とおくと、これらは $[-R, R]$ 上の連続関数で、問題 1 の (2) より f_n は f に一様収束する。この状況に定理 2 を適用すれば

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \int_0^x f_n(t) dt \to \int_0^x f(t) dt = \log(1+x)$$

が成り立つ。しかも収束は x について一様である。

問題 5. 勝手な $x \in [0, 1]$ を取り、固定する。任意の $\varepsilon > 0$ を取る。$Nx \geqslant 1$ となる自然数 N を選べば、$\forall n \geqslant N$ に対し

$$\left| f_n(x) - f_(x) \right| = |0 - 0| < \varepsilon.$$

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

よって $f_n(x)$ は $f(x)$ に各点収束する。積分を計算すると

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1, \quad \int_0^1 f(x)dx = 0$$

だから、極限を取る操作と積分は交換できない。

問題 6. まず、

$$|f_n(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

なので、Weierstrass の判定 (定理 4) により、f_n は $\mathbb{R}$ 上ある関数に一様収束する。一方、

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos x}{k}$$

の値は $x = 0$ において発散している。従って f_n' は一様収束極限を持たず、定理 3 は適用できない。

問題 7. 各 $x \in X$ に対し $f_n(x)$ は Cauchy 列だから、ある実数に収束する。その値を $f(x)$ とおけば、これは X 上の関数を定めている。f_n が f に一様収束することを示そう。任意の $\varepsilon > 0$ を取る。仮定より、$x \in X$ に依らない $N \in \mathbb{N}$ があって、$\forall n, m \geqslant N$ に対し

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす。ここで、$f(x)$ の作り方より、x を止めるごとに $N_x \in \mathbb{N}$ が存在し、$m \geqslant N_x$ なら

$$|f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ。つまり $n \geqslant N, m \geqslant \max\{N, N_x\}$ ならば

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となる。N の方は x に依らないから、f_n は f に一様収束している。

問題 8.

(1) 例題 1(2) の関数 f_n に対し、$g_n(x) := 1 - f_n(x)$ とおく。関数列 g_n は区間 $[0,1]$ 上で一様有界かつ単調増加だが、一様収束極限を持たない。

(2) $g_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ が一様 Cauchy 条件を満たすことを示せばよい。勝手な $n \geqslant m$ に対し

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leqslant \sum_{k=m}^{n} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=m}^{n} M_k$$

が成り立つ。数列 $\sum_{k=1}^{n} M_k$ は仮定より収束列、従って Cauchy 列なので、十分大きい n, m については $\sum_{k=m}^{n} M_k$ はいくらでも小さくなる。すなわち、勝手な $\varepsilon > 0$ に対しある $N \in \mathbb{N}$ が存在し、$n \geqslant m \geqslant N$ である限り

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leqslant \sum_{k=m}^{n} M_k \leqslant \varepsilon$$

を満たす。よって、問題 7 の結果が適用できる。

問題 9. 関数項級数 $\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ に Weierstrass の判定を適用する。$|z| \leqslant R$ より

$$\left|\frac{z^k}{k!}\right| \leqslant \frac{R^k}{k!}$$

なので、$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!} < \infty$ となればよい。正項級数に対する d'Alembert の判定を思い出すと、

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{R^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{R^k}{k!}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{R}{n+1} = 0$$

だから確かに $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!} < \infty$ となる。

次に微分を計算する。$f_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ の導関数は

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = f_{n-1}(z)$$

で与えられるから、これは f に一様収束する。従って、定理 3 のように極限と微分が交換できるはずである。ただし、f' は**複素微分**なので、定理 3 をそのまま適用することはできない。次の定理を使う。

> **定理.** 開円盤 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ 上定義された複素数値関数の列 $f_n(z)$ が次を満たすものとする。
>
> - f_n はある関数 $f(z)$ に一様収束する
> - f_n は複素微分可能で、$f'(z)$ もある関数 $g(z)$ に一様収束する
>
> このとき、$f(z)$ は複素微分可能、すなわち、円盤内部の勝手な点 z に対して
>
> $$f'(z) := \lim_{w\to 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}$$
>
> が存在し、さらに $g(z) = f'(z)$ が成り立つ。

証明は定理 3 のそれと全く同様である。複素微分が通常の微分と違うのは、$w \to 0$ と言ったとき、複素平面内における様々な近づき方を許しているという点である。この条件は、f が実 2 変数関数として全微分可能であるという条件よりもずっと強い。

指数関数 e^x に Taylor の定理を適用すると、$-R \leqslant x \leqslant R$ に対し

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n dt$$

となる。剰余項は、$x > 0$ のとき

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n dt\right| &\leqslant x^n \int_0^x \frac{e^t}{n!}\left(1 - \frac{t}{x}\right)^n dt \\ &\leqslant \frac{e^R}{n!} R^{n+1}\end{aligned}$$

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

と評価できる。$x>0$ についても同様。$x=0$ は言うまでもない。このことから、$n\to\infty$ とすると剰余項は x について一様に 0 に近づくことが分かる。(ここで $\frac{e^R}{n!}R^{n+1}\to 0$ が直ちに分からないようでは困る。「数列の収束」問題 2 の (2) を見よ。) これが、改めて

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

と定義してもよい根拠である。

問題 10.

(1) Weierstrass の判定より、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)(1,n)}\right|R^n<\infty$$

を示せばよい。

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(\alpha,n+1)(\beta,n+1)}{(\gamma,n+1)(1,n+1)}\right|R^{n+1}}{\left|\frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)(1,n)}\right|R^n}=\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(1+n)}\right|R=R<1$$

だから、正項級数に関する d'Alembert の判定が適用できる。

(2) まず

$$f_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha,k)(\beta,k)}{(\gamma,k)(1,k)}z^k$$

とおく。

$$f_n'(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(\alpha,k)(\beta,k)}{(\gamma,k)(1,k-1)}z^{k-1},\qquad f_n''(z)=\sum_{k=2}^{n}\frac{(\alpha,k)(\beta,k)}{(\gamma,k)(1,k-2)}z^{k-2}$$

であり、この表示を用いれば、(1) と同様にして、$f_n'(z)$, $f_n''(z)$ も円盤上で一様収束することが分かる。これをもとに

$$z(z-1)f_n''(z)+((\alpha+\beta+1)z-\gamma)f_n'(z)+\alpha\beta f_n(z)$$

に対する z^k $(2\leqslant k\leqslant n)$ の係数を計算すると、

$$\begin{aligned}&\frac{(\alpha,k)(\beta,k)}{(\gamma,k)(1,k-2)}-\frac{(\alpha,k+1)(\beta,k+1)}{(\gamma,k+1)(1,k-1)}+(\alpha+\beta+1)\frac{(\alpha,k)(\beta,k)}{(\gamma,k)(1,k-1)}\\&-\gamma\frac{(\alpha,k+1)(\beta,k+1)}{(\gamma,k+1)(1,k)}+\alpha\beta\frac{(\alpha,k)(\beta,k)}{(\gamma,k)(1,k)}=0\end{aligned}$$

$1,z$ の係数も消えることが確かめられる。問題 9 の解答例で紹介した定理により、$n\to\infty$ とすれば $f_n'(z)$, $f_n''(z)$ は $f'(z)$, $f''(z)$ に一様収束する。よって

$$z(z-1)f''(z)+((\alpha+\beta+1)z-\gamma)f'(z)+\alpha\beta f(z)=0$$

が成り立つ。

問題 11. まず、帰納的に $a_n \leqslant 2^n$ であることが分かる。実際 $a_n \leqslant 2^n, a_{n+1} \leqslant 2^{n+1}$ とすると

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \leqslant 2^{n+1} + 2 \cdot 2^n \leqslant 2^{n+2}$$

となる。次に、漸化式より

$$\begin{aligned}
&(1-2z)(1+z)\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \\
&= a_0 + (a_1 - a_0)z + \sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1} - 2a_{k-2})z^k + (-a_n - 2a_{n-1})z^{n+1} + (-2a_n)z^{n+2} \\
&= z + (-a_n - 2a_{n-1})z^{n+1} + (-2a_n)z^{n+2}
\end{aligned}$$

が成り立つ。$R < \frac{1}{2}$ となる $R > 0$ を固定すれば、$|z| < R$ のとき

$$\left|(-a_n - 2a_{n-1})z^{n+1} + (-2a_n)z^{n+2}\right| \leqslant 2^{n+2}R^{n+1}$$

だから、一様収束

$$(1-2z)(1+z)\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \ \to \ z$$

が成り立つ。有理関数の**部分分数分解**を用いれば

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= \frac{z}{(1-2z)(1+z)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(1-2z)} - \frac{1}{(1+z)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n\right).
\end{aligned}$$

よって

$$a_n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right)$$

となることが分かる。