作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

一様収束

実施日：June 26, 2018

一様収束

定義. 部分集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ で定義された関数列 f_n が関数 f に**一様に収束する**とは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

が成り立つことである。

補足 1. 一様とは、N が $x \in X$ について一様に取れるという意味である。一方、各 $x \in X$ に対して数列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に収束するとき、f_n は f に各点収束するという。一様収束なら各点収束である。

例題 1.

(1) 閉区間 $X = [0,1]$ 上で定義された関数列 $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ は関数 $f(x) \equiv 0$ に一様に収束することを示せ。

(2) 閉区間 $X = [0,1]$ 上で定義された関数列 $f_n(x) = x^n$ は関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

に各点収束するが、一様収束しないことを示せ。

【解答】

(1) 勝手な $\varepsilon > 0$ を固定する。$N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ とすると、勝手な $n \geqslant N$ に対し**任意の** $x \in [0,1]$ で

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{n} - 0\right| \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon$$

が成り立つ。

(2) $0 < \varepsilon < 1$ を固定する。

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ |x|^n < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ n > \frac{\log \varepsilon}{\log |x|}$$

であり、$|x|$ が 1 に近いと $\frac{\log \varepsilon}{\log |x|}$ はいくらでも大きくなるので、収束は x について一様ではない。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 1. (発表課題)

(1) 閉区間 $X = \mathbb{R}$ 上で定義された関数列

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } \ 0 \leqslant x < n \\ 1 & \text{if } \ x \geqslant n \end{cases}$$

は関数 $f(x) \equiv 0$ に各点収束するが、一様収束しないことを示せ。

(2) $R < 1$ とする。円盤 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ 上で定義された関数列 $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$ は $f(z) = \frac{1}{1-z}$ に一様に収束することを示せ。

問題 2. (必修問題) $R < 1$ とする。Taylor の定理における積分形剰余項を評価することにより、$-R \leqslant x \leqslant R$ に対して一様に

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} x^{2n}$$

が成り立つことを示せ。次に、定理 4 を用いて右辺が一様収束することを示せ。

定理 1. 連続関数の列 f_n がある関数 f に一様収束しているならば、f は連続関数である。

問題 3. 定理 1 の証明を与えよ。

極限交換

定理 2. 閉区間 $[a, b]$ 上定義された連続関数の列 f_n がある関数 f に一様収束しているならば、勝手な $x \in [a, b]$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x f(t)dt$$

が成り立つ。しかも、この収束は x について一様である。

補足 2. 有界閉区間上の連続関数は Riemann 積分可能である。定理 1 より極限関数 $f(x)$ は連続なので、Riemann 積分可能である。

問題 4. $R < 1$ とする。区間 $[-R, R]$ 上で一様に

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$$

が成り立つことを示せ。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 5. $[0,1]$ 上定義された関数列

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{if } \ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n} \\ -2n^2x+2n & \text{if } \ \frac{1}{2n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 & \text{if } \ x \geqslant \frac{1}{n} \end{cases}$$

は関数 $f(x) \equiv 0$ に各点収束することを示せ。極限を取る操作と積分が交換できないことを示せ。

> **定理 3.** 閉区間 $[a,b]$ 上定義された C^1 級関数の列 f_n が f に一様収束していて、導関数 f_n' はある関数 g に一様収束しているならば、
>
> $$f \text{ は } C^1 \text{ 級関数で、} \quad f'(x) = g(x)$$
>
> となる。つまり $\dfrac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\dfrac{d}{dx}f_n(x)$ が成り立つ。

問題 6. $\mathbb{R}$ 上定義された関数項級数

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k^2}$$

は一様収束することを示せ。定理 4 を用いてよい。定理 3 が適用できるか考えよ。

一様収束の判定法

問題 7. 「Cauchy 列は収束する」ことの一様収束版が成り立つ。すなわち、任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n, m \geqslant N \quad \Rightarrow \quad \forall x \in X \ \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

を満たすならば、$f_n(x)$ はある関数 $f(x)$ に一様収束する。このことを示せ。

問題 8.

(1) 「上に有界な単調増加列は収束する」ことの一様収束版は成り立たない。すなわち、実数値関数の列 $f_n(x)$ が単調増加で、一様な有界性 $0 \leqslant f_n(x) \leqslant M$ を満たすとしても、$f_n(x)$ は一様収束しない。まずこのことを確認せよ。

(2) しかし、次の定理が成り立つ。問題 7 の結果を用いてこのことを示せ。

> **定理 4.** **[Weierstrass の判定]** 関数項級数の列 $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ が $X \subset \mathbb{R}^n$ 上で一様に
>
> $$|f_k(x)| \leqslant M_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$$
>
> と評価できるならば、$\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ はある関数 $F(z)$ に X 上で一様に収束する。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

この定理は強力であり、関数項級数の一様収束を示す際に極めて頻繁に用いられる。問題2も参考にせよ。なお、各 x に対し $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は絶対収束するので、和の順序も自由に変更できる。

問題 9. (発表課題) $z \in \mathbb{C}$ に対し

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

とおく。右辺は勝手な $R > 0$ に対し $|z| \leqslant R$ 上で一様収束することを示せ。さらに、

$$\frac{df}{dz}(z) = f(z)$$

が成り立つことを示せ。

問題 10. $\alpha, \beta, \gamma, z \in \mathbb{C}$ とする。

$$(\alpha, n) := \begin{cases} \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) & \text{if} \quad n \geqslant 1 \\ 1 & \text{if} \quad n = 0 \end{cases}$$

とおく。**超幾何級数**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)} z^n$$

について次の問いに答えよ。

(1) $R < 1$ に対し、この級数は円盤 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ で一様に収束することを示せ。

(2) 極限 $f(z)$ は単位円版の内部において複素微分可能で、微分方程式

$$z(z-1)\frac{d^2 f}{dz^2} + ((\alpha+\beta+1)z - \gamma)\frac{df}{dz} + \alpha\beta f = 0$$

を満たすことを示せ。

問題 11. 数列 a_n が漸化式

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, \quad a_0 = 0, \ a_1 = 1$$

を満たすとする。$|z| < \frac{1}{2}$ に対し

$$\frac{z}{(1-2z)(1+z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

が成り立つことを示せ。さらに、この表示を利用して a_n を求めよ。このようなものを、数列の**母関数**という。