作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

抽象内積：解答

解答例を読むだけではなく、もう一度、何も見ずに自力で解答が作成できるかどうか手を動かして確かめてください。

問題 1. いずれの場合も $\langle ax+by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle$ は満たされる。さらに、$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ が成り立つことと ${}^tA = A$ は同値である。

(1) A が対称でないため、内積にならない。

(2) 内積になる。正値性: $\langle x, x\rangle > 0$ は明らか。

(3) 内積になる。正値性は平方完成:

$$\langle x, x\rangle = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 2(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{5}{2}x_2^2 > 0$$

によって確かめられる。固有値が 2 つとも正であるからと言ってもよい。(何故か？問題 5 の解答も参照せよ。)

(4) 内積にならない。正値性が成り立たないことは、$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を代入すればわかる。

問題 2. 線形性より

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle.$$

対称性より $\langle x, x+y\rangle = \langle x+y, y\rangle$ で、再び線形性を使えばこれは $\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$ と分解できる。$\|x-y\|^2$ も同様に分解すれば、示すべき公式を得る。

この等式は、内積が長さによって決まることを示している。$\|x\|^2 := \langle x, x\rangle$ だから、長さが内積によって決まることは明らかである。

問題 3. $e_1, \ldots, e_n$ が基底なので $x = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$ と書ける。両辺と e_i の内積を取れば正規直交性より $\langle x, e_i\rangle = a_i$ となる。

問題 4.

(1) $X, Y \in V$ とすると勝手な実数 $a, b \in \mathbb{R}$ について

$${}^t\overline{(aX+bY)} = a{}^t\overline{X} + b{}^t\overline{Y} = aX + bY$$

だから $aX + bY \in V$. よって V は実ベクトル空間である。

$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in V$ と書くと、Hermite 性は ${}^t\overline{A} = A \Leftrightarrow \overline{\alpha} = \alpha, \overline{\beta} = \gamma, \overline{\delta} = \delta$ という条件なので、実数 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ を用いて

$$X = \begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と書ける。ここに現れた 4 つの行列が V の基底を与える。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(2) $\operatorname{Tr} XY = \operatorname{Tr} YX,\ \operatorname{Tr}(aX+bY)Z = a \operatorname{Tr} XZ + b \operatorname{Tr} YZ,\ \operatorname{Tr} X^2 > 0$ であることが上の成分表示を用いて容易に確かめられる。

(3) これも計算するだけでよいので省略。(基底になることもちゃんと確かめること。)

問題 5. $\|v_1\| = \sqrt{5}$ なので $e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ となる。$v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ だから $e_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{70}} \\ \frac{-1}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$.

問題 6. $e_1 = 1,\ e_2 = \sqrt{3}(2x-1),\ e_3 = \sqrt{5}(6x^2-6x+1)$.

問題 7. $v \in W \cap W^\perp$ とすると $\langle v, v \rangle = 0$ だから、内積の正値性より $v = 0$ となる。よって $W \cap W^\perp = \{0\}$ である。

さて、有限次元ベクトル空間に基底が存在することの証明をよく思い出すと、W の基底 $v_1, \ldots, v_r$ をまず取り、それを V の基底 $v_1, \ldots, v_n$ に延長することができる。r は W の次元である。こうして得た基底に Gram-Schmidt の直交化法を適用すると、帰納的に e_i は $v_1, \ldots, v_i$ の一次結合であることが分かる。従って、$e_1, \ldots, e_r \in W$ となる正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n \in V$ が得られる。次元のことを考えると $e_1, \ldots, e_r$ は W の基底だから、正規直交性より $e_{r+1}, \ldots, e_n \in W^\perp$ が成り立つ。これにより任意の $x \in V$ は W の元と $W^\perp$ の元の一次結合で書けることが分かる。よって $V = W \oplus W^\perp$ が確かめられた。

問題 8. U の ij 成分を U_{ij} と書く。表現行列の定義より

$$f(e_1, \ldots, e_n) = (e_1, \ldots, e_n)U \ \Leftrightarrow\ f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} e_j U_{ji}$$

が成り立つ。

$$\langle e_i, e_j \rangle = \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} e_k U_{ki}, \sum_{\ell=1}^{n} e_\ell U_{\ell j} \rangle = \sum_{k=1}^{n} U_{ki} U_{kj}$$

最後の和は ${}^t\!UU$ の ij 成分だから、${}^t\!UU = E$ となることが確かめられた。

同様に、ユニタリ変換 f を正規直交基底について表現したものはユニタリ行列となることが分かる。

問題 9. 標準基底に関する f の表現行列を U とする。問題 9 より、${}^t\!UU = E$ が成り立つ。$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとこれは

$$a^2 + c^2 = 1, ab + cd = 0, b^2 + d^2 = 1$$

と書ける。これを解けばよい。

つまり、回転とは、行列式が 1 の直交変換ということができる。興味があれば 3 次元の場合も考えてみよ。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 10. 任意の $x, x' \in \mathbb{R}^n$ について

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(x')\rangle &= \langle x - \frac{2\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}y, x' - \frac{2\langle x',y\rangle}{\langle y,y\rangle}y\rangle \\ &= \langle x, x'\rangle - \frac{2\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle y,x'\rangle - \frac{2\langle x',y\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle x,y\rangle + \frac{4\langle x,y\rangle\langle x',y\rangle}{\langle y,y\rangle^2}\langle y,y\rangle \\ &= \langle x, x'\rangle\end{aligned}$$

が成り立つので、f は直交変換。

問題 11. 任意の $\{a_n\}, \{b_n\} \in V$ について

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(a_n), \mathcal{F}(b_n)\rangle &= \langle \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^N a_k\xi^{nk}, \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^N b_k\xi^{nk}\rangle \\ &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^N a_k\xi^{nk}\right)\overline{\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\ell=1}^N b_\ell\xi^{n\ell}\right)} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k,\ell=1}^N \left(a_k\overline{b_\ell}\sum_{n=1}^N \xi^{n(k-\ell)}\right).\end{aligned}$$

$k \neq \ell$ ならば $\sum_{n=1}^N \xi^{n(k-\ell)} = 1$, $k = \ell$ ならば $\sum_{n=1}^N \xi^{n(k-\ell)} = N$ なので、最後の項は $\sum_{k=1}^N a_k\overline{b_k} = \langle\{a_n\}, \{b_n\}\rangle$ に等しい。よって f は直交変換。

問題 12. A の ij 成分を A_{ij} と書く。表現行列の定義より

$$f(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n)A \iff f(e_i) = \sum_{j=1}^n e_jA_{ji}$$

が成り立つ。

$$\langle e_i, f(e_j)\rangle = \langle e_i, \sum_{k=1}^n e_jA_{jk}\rangle = \overline{A_{ji}}$$

同様に $\langle f(e_i), e_j\rangle = A_{ij}$. よって Hermite 性は A が Hermite 行列であることを導く。

問題 13. $\langle\ ,\ \rangle$ を Hermite 内積、$f\colon V \to V$ を Hermite 作用素とする。

(1) 固有値を λ とすると、定義より、$f(v) = \lambda v$ となる $v \in V \setminus \{0\}$ が存在する。

$$\lambda\langle v,v\rangle = \langle f(v), v\rangle = \langle v, f(v)\rangle = \overline{\lambda}\langle v,v\rangle$$

$\langle v,v\rangle \neq 0$ だから $\lambda = \overline{\lambda}$ が従う。

(2) 異なる固有値を λ, λ', それぞれに属する固有ベクトルを v, v' とすると、

$$(\lambda - \lambda')\langle v,v'\rangle = \langle f(v), v'\rangle - \langle v, f(v')\rangle = \langle v, f(v')\rangle - \langle v, f(v')\rangle = 0$$

$\lambda \neq \lambda'$ だから $\langle v,v'\rangle = 0$ が従う。

作成者： 久本 智之　研究室： A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(3) 固有多項式は $\det(\lambda E-A)=\lambda^3-3\lambda+4=(\lambda+1)(\lambda-2)^2$ だから、固有値は $\lambda=-1,2$ である。まずはそれぞれの固有ベクトルを求めると、

$$\alpha\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \end{pmatrix},\ \beta\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。α,β,γ は勝手な複素数である。$\lambda=-1$ に属する固有ベクトルが張るベクトル空間を V_{-1}, $\lambda=2$ に属する固有ベクトルが張るベクトル空間を V_2 とする。(2) より、それぞれの V_λ で正規直交基底を求めれば、それらを並べたものが V の正規直交基底になる。まずは $\lambda=-1$ に属する固有ベクトルを正規化すると

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

となる。次いで、V_2 について、上で気ままに取った基底に Gram-Schmidt の直交化法を使うと

$$e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -2 \end{pmatrix}$$

が得られる。作り方より

$$e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -2 \end{pmatrix}$$

となる。Hermite 内積は $\langle z,w\rangle=z_1\overline{w_1}+z_2\overline{w_2}$ であることに注意。作り方から

$$\begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ -i & 1 & -i \\ -1 & i & 1 \end{pmatrix}(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

が成り立つので、与えられた Hermite 行列をユニタリ対角化できた。

問題 14. 問題 5 の内積は、対称行列 $A:=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ から問題 1 のように定められたものである。行列 A を直交行列で対角化すると

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{-2}{\sqrt5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{-2}{\sqrt5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

となる。このことから、

$$\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt7}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{-2}{\sqrt5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{35}} \\ \frac{-2}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}$$

が A の定める内積について正規直交基底を与える。

作成者： 久本 智之　研究室： A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 15.

(1) 部分積分により

$$\int_0^1 \frac{d^2 f}{dx^2}(x)\overline{g(x)}dx = -\int_0^1 \frac{df}{dx}(x)\overline{\frac{dg}{dx}(x)}dx = \int_0^1 f(x)\overline{\frac{d^2 g}{dx^2}(x)}dx.$$

(2) 固有値は $-4n^2\pi^2$, 固有ベクトルは $\sin 2n\pi x$ となる。ちなみに、V の定義において境界条件を $f(0)=f(1)=0$ と強めると、T は固有値を 1 つも持たない。