作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

抽象内積

実施日：June 26, 2018

内積、Hermite 内積

定義.

- V を有限次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間とする。写像
$$\langle\ ,\ \rangle\colon V\times V\to\mathbb{R}$$
で次の条件を満たすものを、V 上の**内積**という。
  - $\langle y,x\rangle=\langle x,y\rangle$ for all $x,y\in V$
  - $\langle ax+by,z\rangle=a\langle x,z\rangle+b\langle y,z\rangle$ for all $a,b\in\mathbb{R},x,y,z\in V$
  - $\langle x,x\rangle>0$ for all $x\in V\setminus\{0\}$
- V が有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間のとき、写像
$$\langle\ ,\ \rangle\colon V\times V\to\mathbb{C}$$
で次の条件を満たすものを、V 上の **Hermite 内積**という。
  - $\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}$ for all $x,y\in V$
  - $\langle ax+by,z\rangle=a\langle x,z\rangle+b\langle y,z\rangle$ for all $a,b\in\mathbb{C},x,y,z\in V$
  - $\langle x,x\rangle>0$ for all $x\in V\setminus\{0\}$

問題 1. (発表課題) 2×2 行列 A と $x,y\in\mathbb{R}^2$ に対し
$$\langle x,y\rangle:={}^t xAy=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$
と置いたものはいつ内積になるだろうか。以下の 4 つの場合を考えよ。

(1) $A=\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}$　(2) $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$　(3) $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}$　(4) $A=\begin{pmatrix}2&4\\4&3\end{pmatrix}$

問題 2. V を実ベクトル空間、$\langle\ ,\ \rangle$ を内積とする。$\|x\|^2:=\langle x,x\rangle$ とおく。このとき、$x,y\in V$ に対して
$$4\langle x,y\rangle=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2$$
が成り立つことを示せ。この等式からどのようなことが分かるか。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

正規直交基底

定義. $\langle\ ,\ \rangle$ を内積あるいは Hermite 内積とする。V の基底 $e_1,\dots,e_n$ で

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

を満たすものを**正規直交基底**という。

問題 3. $e_1,\dots,e_n \in V$ が正規直交基底ならば、勝手なベクトル $x\in V$ は

$$x = \langle x, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_n\rangle e_n$$

と書けることを示せ。

問題 4. (必修問題) V を、2×2 の Hermite 行列全体が成す集合とする。

(1) V は 4 次元の実ベクトル空間であることを示せ。

(2) $A, B\in V$ に対し

$$\langle A, B\rangle := \frac{1}{2}\operatorname{Tr} AB$$

とおくと、これは V の内積を定めることを示せ。

(3) 次の $E, A_1, A_2, A_3 \in V$ は正規直交基底であることを示せ。

$$E = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

定理 1. (**Gram-Schmidt の直交化法**) $v_1,\dots,v_n$ を V の基底とする。この時、次の手順に従って定まる $e_1,\dots,e_n$ は V の正規直交基底である。

- $e_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$ と定める。
- $e_2 = \dfrac{v_2 - \langle v_2, e_1\rangle e_1}{\|v_2 - \langle v_2, e_1\rangle e_1\|}$ とする。
- 以下帰納的に、

$$e_{k+1} = \frac{v_{k+1} - \langle v_{k+1}, e_1\rangle e_1 - \langle v_{k+1}, e_2\rangle e_2 - \cdots - \langle v_{k+1}, e_k\rangle e_k}{\|v_{k+1} - \langle v_{k+1}, e_1\rangle e_1 - \langle v_{k+1}, e_2\rangle e_2 - \cdots - \langle v_{k+1}, e_k\rangle e_k\|}$$

と定める。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

例 1. $\mathbb{R}^2$ の内積

$$\langle x, y\rangle := 2x_1y_1 + 3x_2y_2$$

を考える。$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し Gram-Schmidt の直交化法を適用し、正規直交基底を求めよ。

【解答】 $\|v_1\| = \sqrt{5}$ より、$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. 次に、$\langle v_2, e_1\rangle = -\frac{3}{\sqrt{5}}$ より、$e_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

問題 5. $\mathbb{R}^2$ の内積

$$\langle x, y\rangle := 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2,$$

および基底 $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, に対して Gram-Schmidt の直交化法を用い、正規直交基底 e_1, e_2 を作れ。

問題 6. (発表課題) V を、高々2次の実係数多項式全体が成すベクトル空間とする。内積

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

と基底 $1, x, x^2$ 対して Gram-Schmidt の直交化法を用い、正規直交基底を作れ。

問題 7. V を有限次元実ベクトル空間、$\langle\ ,\ \rangle$ を内積とする。部分ベクトル空間 $W \subset V$ に対し

$$W^{\perp} := \left\{ v \in V :\ \forall w \in W \quad \langle v, w\rangle = 0 \right\}$$

を W の**直交補空間**という。$W^{\perp}$ は部分ベクトル空間であり、

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

が成り立つことを示せ。

直交変換、ユニタリ変換

定義. 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に対し、線形写像 $f\colon V \to V$ で

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle \qquad \forall x, y \in V$$

を満たすものを**直交変換**という。Hermite 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に対し、線形写像 $f\colon V \to V$ で

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle \qquad \forall x, y \in V$$

を満たすものを**ユニタリ変換**という。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 8. 直交変換 f の、正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ に関する表現行列を U とする。このとき、U は直交行列となる、すなわち ${}^tUU = U{}^tU = E$ が成り立つことを示せ。ユニタリ変換についてはどうか。

問題 9. $\mathbb{R}^2$ の標準的な内積に関する直交変換は

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{あるいは} \quad f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と書けることを示せ。(ヒント: 前問を使う)

問題 10. $\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathbb{R}^n$ の標準内積とする。原点を通り $y \in \mathbb{R}^n$ を法ベクトルとする超平面は

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = 0\right\}$$

と書ける。

$$f(x) := x - \frac{2\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}y$$

によって定まる線形変換 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を、超平面に関する**鏡映変換**という。鏡映変換が直交変換であることを示せ。

問題 11. 離散 Fourier 変換 (第 4 回, 問題 8) を思い出す。複素数列 a_n で $a_{n+N} = a_n$ を満たすもの全体を V とし、Hermite 内積

$$\langle\{a_n\}, \{b_n\}\rangle := \sum_{n=1}^{N} a_n\bar{b}_n$$

を入れる。ξ を 1 の原始 N 乗根とし、離散 Fourier 変換を $\mathcal{F}\colon V \to V$ を、改めて

$$\mathcal{F}(\{a_n\}) = \left\{a'_n := \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N} a_k\xi^{nk}\right\}$$

と定義する。$\mathcal{F}$ はユニタリ変換であることを示せ。

対称作用素、Hermite 作用素

定義. 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に対し、線形写像 $f\colon V \to V$ で

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle \qquad \forall x, y \in V$$

を満たすものを**対称作用素**という。Hermite 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に対し、線形写像 $f\colon V \to V$ で

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle \qquad \forall x, y \in V$$

を満たすものを **Hermite 作用素**という。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 12. Hermite 作用素の正規直交基底に関する表現行列を A とする。A は Hermite 行列となる、すなわち ${}^t\bar{A} = A$ が成り立つことを示せ。

問題 13. (必修問題)

(1) Hermite 作用素の固有値は実数であることを示せ。

(2) 相異なる固有値に属する固有ベクトルは互いに直交することを示せ。

(3) Hermite 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ -i & 1 & -i \\ -1 & i & 1 \end{pmatrix}$$

を、適当なユニタリ行列によって対角化せよ。

問題 14. 問題 5 の内積について、固有値・固有ベクトルを使って正規直交基底を求めよ。

問題 15. 自然数 n に対し、

$$V := \left\{ f : \text{複素数値 } C^2 \text{ 級関数で、} f(0) = f(1) = 0 \text{ を満たすもの} \right\}$$

とおく。これは無限次元の複素ベクトル空間である。“Hermite 内積”

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

について以下の問いに答えよ。

(1) $T : V \to V$ を

$$(Tf)(x) := \frac{d^2 f}{dx^2}(x)$$

と定めると、これは “Hermite 作用素” であることを示せ。

(2) T の “固有値” と、それらに属する “固有ベクトル” を求めよ。

※ “ ” をつけたのは、**一般の**無限次元ベクトル空間で Hermite 作用素や固有値を考えるとき、有限次元と同じように定義するのでは様々な問題が生じるからである。例えば問題 15 の状況で、“Hermite 作用素”

$$(Hf)(x) := xf(x)$$

は “固有値” を 1 つも持たない！

量子力学では、**物理状態**は無限次元のベクトルで表され、**物理量**は “Hermite 作用素” で表される。“固有値” の実数性は、観測される量が実数であることを保証する。