作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

関数の連続性：解答

解答例を読むだけではなく、もう一度、何も見ずに自力で解答が作成できるかどうか手を動かして確かめてください。

問題 1.

(1) 勝手な $\varepsilon > 0$ を取る。$\delta := \varepsilon$ とすれば、$|x| < \delta$ のとき

$$||x| - |0|| = |x| < \delta = \varepsilon$$

が成り立つ。つまり $f(x) = |x|$ は原点で連続である。

(2) $\sin x$ は「単位円周上を点 $(1,0)$ から反時計回りに長さ x だけ進んだ点」の y 座標である。従って常に $|\sin x| \leqslant |x|$ が成り立つ。さて勝手な $\varepsilon > 0$ を取る。$\delta := \varepsilon$ とすれば、$|x| < \delta$ のとき

$$|\sin x - \sin 0| = |\sin x| \leqslant |x| < \delta = \varepsilon.$$

(3) 自然数 n に対し、$x = \frac{2}{(2n+1)\pi}$ とすると、$\sin\frac{1}{x} = (-1)^n$ が成り立つ。従って、$\varepsilon = 1$ に対しては、$|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$ となる $\delta > 0$ が存在しない。すなわち、$f(x)$ は原点で連続でない。

問題 2.

(1) 勝手な $\varepsilon > 0$ を取る。仮定より、ある $\delta_1 > 0$ が存在し $|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ。同様に、ある $\delta_2 > 0$ が存在し $|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ。$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とすると

$$\begin{aligned}|(f(x)+g(x)) - (f(a)+g(a))| &= |(f(x)-f(a)) + (g(x)-g(a))| \\ &\leqslant |f(x)-f(a)| + |g(x)-g(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

よって $f+g$ は点 a で連続である。

(2) 勝手な $\varepsilon > 0$ を取り、

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}\right| = \frac{|f(x) - f(a)|}{|f(x)f(a)|}$$

を上から評価する。まず $f(x) \neq 0$ かどうかが問題であり、$|f(x)|$ を下から評価せねばならない。仮定より、ある $\delta > 0$ が存在し

$$|x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \min\left\{\frac{|f(a)|^2}{2}\varepsilon, \frac{|f(a)|}{2}\right\}$$

が成り立つ。こうしておけば $|f(x) - f(a)| < \frac{|f(a)|}{2}$ なので

$$|f(x)| = |f(a) - (f(x) - f(a))| \geqslant |f(a)| - |f(x) - f(a)| > \frac{|f(a)|}{2}$$

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

と評価できる。さらに、$|f(x)-f(a)| < \frac{|f(a)|^2}{2}\varepsilon$ だから

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(a)}\right| = \frac{|f(x)-f(a)|}{|f(x)f(a)|} \leqslant \frac{2\,|f(x)-f(a)|}{|f(a)|^2} < \varepsilon.$$

問題 3. 勝手な $a\in\mathbb{R}$ を取る。f の連続性より、任意の ε に対してある $\delta>0$ が存在して

$$|x-a|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

が成り立つ。一方、有理数の**稠密性**より、$|x-a|<\delta$ となる有理数 $x\in\mathbb{Q}$ が存在する。仮定より有理数に対しては $f(x)=0$ だから

$$|f(a)| = |f(x)-(f(x)-f(a))| \leqslant |f(x)|+|f(x)-f(a)| = |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

と評価できる。$\varepsilon>0$ は任意だったから、これは $f(a)=0$ を意味する。

問題 4. f が連続ならば、$\varepsilon>0$ に対しある $\delta>0$ が存在して $|x-a|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(a)|<\varepsilon$ となる。数列 $x_n\to a$ を取ると、上の δ に対してある $N\in\mathbb{N}$ が存在して $n\geqslant N \Rightarrow |x_n-a|<\delta$ が成り立つ。よって $|f(x_n)-f(a)|<\varepsilon$ となる。

逆が問題である。背理法を使う。仮に、どんな $\delta>0$ を取っても

$$|x-a|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

とは**ならない** $\varepsilon>0$ があるとする。特に $\delta=\frac{1}{n}$ を考えると、ある $x_n\in\mathbb{R}$ が存在して

$$|x_n-a|<\frac{1}{n},\quad |f(x_n)-f(a)|\geqslant\varepsilon$$

となる。すると、$x_n\to a$ だから $f(x_n)\to f(a)$. つまりある $N\in\mathbb{N}$ が存在して $n\geqslant N \Rightarrow |f(x_n)-f(a)|<\varepsilon$ が成り立つ。これは矛盾である。

問題 5. 3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ を取り、勝手な実数 y に対し $f(x)=y$ となる実数 x が存在することを示す。$f(x)$ の取り得る値と $-f(x)$ の取り得る値は -1 倍することで 1 対 1 に対応しているので、$a>0$ としてよい。定数関数や 1 次関数は各点で連続であり、3 次関数はそれらの積と和を用いて書けるから、$f(x)$ は連続関数である。

まず、x が十分に大きいとき $f(x)$ は 3 次の項が支配的となり、いくらでも大きい値を取る。具体的には、勝手な自然数 $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$x\geqslant\max\left\{\frac{(a+|b|+|c|+|d|)n}{a}, n\right\}$$

とすれば

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^3+bx^2+cx+d = (ax)x^2+bx^2+cx+d\\ &\geqslant (a+|b|+|c|+|d|)n^3-|b|\,n^2-|c|\,n-|d| \geqslant an^3\end{aligned}$$

となる。同様に、x が十分に大きいとき $f(x)$ はいくらでも小さい値を取る。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

さて、勝手な $y \in \mathbb{R}$ を取り固定する。今示したことから、$y \in [f(-m), f(m)]$ となる自然数 m が存在する。そこで 3 次関数 f を区間 $[-m, m]$ 上の連続関数と見做し中間値の定理を適用すれば、$f(x) = y$ となる実数 x が存在することが分かる。

【別解】与えられた $y \in \mathbb{R}$ に対し方程式 $f(x) = y$ の解が存在することを示す。$f(x)$ を $f(x) - y$ に置き換えれば、$y = 0$ としてよい。代数学の基本定理より、複素数の範囲で $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ と因数分解できる。$f(\alpha) = 0$ ならば

$$f(\bar{\alpha}) = a\bar{\alpha}^3 + b\bar{\alpha}^2 + c\bar{\alpha} + d = \overline{a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d} = \overline{f(\alpha)} = 0$$

なので、$\beta = \bar{\alpha}$ としてよい。すると

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})(x - \gamma) = a(x^2 - 2(\mathrm{Re}\alpha)x + |\alpha|^2)(x - \gamma)$$

だから、特に $d = -a\,|\alpha|^2\,\gamma.$ 従って $\gamma \in \mathbb{R}$ が必要。実は、代数学の基本定理を証明する上で実数の連続性が重要である。

問題 6. $h(t) := f(t)^2 + g(t)^2$ は区間 $[0, 1]$ 上の連続関数である。なぜなら連続関数の積 $f(t)^2, g(t)^2$ は連続関数で、これらの和 $h(t)$ は連続関数となるからである。$h(0) = 0, h(1) = 4$ だから、中間値の定理より、$f(t)^2 + g(t)^2 = 1$ となる $t \in [0, 1]$ が存在する。これは連続曲線が単位円と交わることを意味する。

問題 7. 円は単位円としてよい。内接三角形の頂点のうち 1 点は $(-1, 0)$ としてよい。残りの 2 頂点を $(\cos x_1, \sin x_1), (\cos x_2, \sin x_2)$ とすると、面積は

$$\frac{1}{2}\left|(-1 + \cos x_1)\sin x_2 - \sin x_1(-1 + \cos x_2)\right|$$

と書ける。これは $x = (x_1, x_2) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ についての連続関数である。というのは、まず $\cos t$ や $\sin t$ は t について連続関数で、$|x - a| < \delta$ ならば $|x_1 - a_1| < \delta$ だから $\cos x_1$ や $\sin x_2$ は $x = (x_1, x_2)$ について連続関数。積や和を取った $(-1 + \cos x_1)\sin x_2 - \sin x_1(-1 + \cos x_2)$ は $x = (x_1, x_2)$ について連続関数となる。さらに、絶対値を取る関数 $f(t) := |t|$ を合成したものは連続だからである。(一般に連続関数に連続関数を合成したものは連続である。各自確かめよ。) 定義域 $K = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ は有界閉集合だから、最大値最小値の定理より、この関数には最大値が存在する。

同じことであるが、もっと綺麗にやりたいのなら、3 つの頂点を複素数 α, β, γ と置いて、面積が対称な形

$$\frac{1}{2}\left|\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\gamma} - \bar{\beta}\gamma + \gamma\bar{\alpha} - \bar{\gamma}\alpha\right|$$

で表せることを見る。これは複素変数 α, β, γ について連続である。(複素変数に関する連続性をどう定義すればよいかは各自考えよ。) 定義域

$$\left\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 : |\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1\right\}$$

は有界閉集合である。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 8.

- 実数直線 $\mathbb{R}$ 上の 1 次関数 $f(x) := x$ は連続だが最大値も最小値も持たない。だから有界性の仮定は外すことができない。
- 有界な開区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上の関数 $f(x) := \tan x$ は連続だが最大値も最小値も持たない。だから閉集合であるという仮定は外すことができない。
- 有界な閉区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上の関数を

$$f(x) := \begin{cases} \tan x & \text{if } x \neq \pm\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定める。これは最大値も最小値も持たない。だから閉集合であるという仮定は外すことができない。

問題 9. 関数 $f(x)$ は実のところ x の成分 x_1, x_2 についての 2 次関数なので、平方完成により最小値は簡単に求まる。しかし、ここでは練習のために敢えて最大値最小値の定理を使ってみる。

まず、関数 $g_k(x) := |x - a_k|$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ が勝手な点 $b \in \mathbb{R}^2$ で連続であることを確かめる。任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta := \varepsilon$ とすれば、$|x - b| < \delta$ のとき三角不等式より

$$|g_k(x) - g_k(b)| = ||x - a_k| - |b - a_k|| \leqslant |x - b| < \varepsilon$$

が成り立つ。よって $g_k(x)$ は連続関数である。$g_k(x)$ の積 $|x - a_k|^2$ はまた連続関数で、それらの和 $f(x)$ も連続関数となる。

さて $f(x)$ の定義域だが、有界な定義域を選ばないと最大値最小値の定理が適用できない。そこで、各 $1 \leqslant j \leqslant n$ に対し少なくとも

$$f(a_j) = \sum_{k=1}^{n} |a_j - a_k|^2$$

となることに注意する。$|x| > \sqrt{f(a_j)} + |a_j|$ ならば

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - a_k|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} ||x| - |a_k||^2 > f(a_j)$$

なので、最小値があるならそれは有界閉集合

$$K := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \forall j \quad |x| \leqslant \sqrt{f(a_j)} + |a_j| \right\}$$

の中である。最大値最小値の定理を $f\colon K \to \mathbb{R}$ に適用すれば、最小値が存在することが分かる。

最小値が存在するならばそれは極値だから、それは x, a_k の第 i 成分を $x_i, a_{k,i}$ $(i = 1, 2)$ として

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2\sum_{k=1}^{n}(x_i - a_{k,i}) = 0 \ \Leftrightarrow \ x_i = \frac{\sum a_{k,i}}{n}$$

つまり x が $a_1, \ldots, a_n$ の重心のときに限る。