作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

関数の連続性

実施日：June 12, 2018

$\varepsilon-\delta$ 論法

定義. 実数値関数 f が、点 $a \in \mathbb{R}^n$ のまわりで定義されているとする。任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $\delta > 0$ が存在して

$$|x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つとき、f は点 a において**連続**であるという。

補足 1. $x \in \mathbb{R}^n$ であることに注意せよ。

$$|x-a| := \Big((x_1-a_1)^2 + \cdots + (x_n-a_n)^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

である。

補足 2. 例えば f が区間 $[0,1]$ でのみ定義されている関数なら、関数の値 $f(x)$ は $x \in [0,1]$ でなければ意味を成さない。こういう場合、端点 1 における連続性は

$$\forall x \in [0,1], \quad |x-1| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

という条件だと了解する。

例題 1. $\mathbb{R}$ 上定義された関数 $f(x) := \dfrac{1}{x}$ が点 1 で連続なことを示せ。

【解答】 $\varepsilon > 0$ を固定する。$\delta := \min\{1/2, \varepsilon/2\}$ とすると、$|x-1| < \delta$ のとき特に

$$|x| \geqslant \frac{1}{2}$$

だから

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| < \frac{\delta}{|x|} \leqslant \varepsilon.$$

問題 1. (必修問題) 次の関数が原点で連続かどうか判定せよ。

(1) $f(x) := |x|$

(2) $f(x) := \sin x$

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(3) $f(x) := \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & \text{if } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{if } \ x = 0 \end{cases}$

問題 2. (発表課題)

(1) $\mathbb{R}^n$ 上定義された実数値関数 $f(x), g(x)$ が点 a で連続であるとき、$f(x) + g(x)$ も点 a で連続であることを示せ。

(2) $\mathbb{R}^n$ 上定義された関数 $f(x)$ が点 a で連続で、しかも $f(a) \neq 0$ であるとする。このとき $\dfrac{1}{f(x)}$ は点 a で連続となることを示せ。

問題 3. $\mathbb{R}$ 上定義された連続関数 $f(x)$ が $\forall x \in \mathbb{Q}$ に対し $f(x) = 0$ を満たすとき、実は $\forall x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) = 0$ が成り立つことを示せ。

問題 4. 関数 $f(x)$ が点 $a \in \mathbb{R}$ で連続であることと、a に収束する勝手な点列 $x_n \in \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \dots)$ に対し $f(x_n) \to f(a)$ が成り立つことは同値である。このことを証明せよ。

中間値の定理

定理. 区間 $[a, b]$ 上定義された関数 $f(x)$ が連続であるとする。このとき、f は $[f(a), f(b)]$ の任意の点を値に取る。

問題 5. (発表課題) 勝手な 3 次関数は、与えられた任意の実数を値に取る。中間値の定理を用いてこのことを示せ。余力があれば、代数学の基本定理を用いてこのことを示せ。

問題 6. $f(t), g(t)$ を区間 $[0, 1]$ 上定義された連続関数とする。写像

$$t \mapsto \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

を**連続曲線**と呼ぶ。$f(0) = g(0) = 0, f(1) = g(1) = 2$ のとき、この曲線は単位円周と必ず交わることを示せ。

最大値最小値の定理

定理. 有界な閉集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された関数 $f\colon K \to \mathbb{R}$ が連続であるとする。このとき、f は最大値と最小値を持つ。

補足 3. $K \subset \mathbb{R}^n$ が**有界**とは、ある実数 $R > 0$ が存在して $\forall x \in K$ $|x| \leqslant R$ を満たすことをいう。$K \subset \mathbb{R}^n$ が**閉集合**とは、点列 $x_n \in K$ が $x \in \mathbb{R}^n$ に収束するとき常に $x \in K$ となることをいう。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

例題 2. $x+y=1$ を満たす変数 $x, y \geqslant 0$ についての関数

$$f(x,y) = x\log x + y\log y$$

が最小値を持つことを示せ。また、その値を求めよ。

【解答】 関数 $f(x,y)$ の定義域は、平面上の線分

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x, y \geqslant 0, x+y=1 \right\}$$

である。この線分の端点、例えば $x=0$ のときは、$\log x$ が定義できていないので注意が必要である。しかし

$$x \to 0 \text{ のとき } x\log x \to 0$$

なので、$f(0,1) := 0$ と考えるのが自然であり、実際こうすれば $f(x,y)$ は K 上連続となる。K は $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合なので、連続関数 $f(x,y)$ は最小値を持つ。最小値を持つことさえ分かれば、**Lagrange の未定乗数法**により、それは $x=y=1/2$ のときの値 $-\log 2$ しかあり得ない。

あるいは、変数 y を消去することにより、$f(x,y)$ は閉区間 $[0,1]$ 上の関数

$$g(x) := \begin{cases} x\log x + (1-x)\log(1-x) & \text{if } x \neq 0,1 \\ 0 & \text{if } x = 0,1 \end{cases}$$

と同一視できる。やはり端点での振る舞いには注意が必要である。実際 $g(x)$ は端点まで連続だが、2 階導関数は発散する。区間 $[0,1]$ は有界閉集合なので、連続関数 $g(x)$ は最小値を持つ。最大値最小値の定理を使わなくても、$g(x)$ を微分して増減表を書けば最小値を求められる。しかし x と y についての対称性は崩れてしまう。

確率分布 $p_1, \ldots, p_n$ に対し $-\sum_{k=1}^n p_i \log p_i$ を**エントロピー**という。

問題 7. (必修問題) 最大値最小値の定理を使い、円に内接する三角形で面積最大のものが存在することを示せ。

問題 8. 最大値最小値の定理は、「K が有界であること」「閉集合であること」「f が連続であること」どの条件を外しても反例があることを示せ。

問題 9. 平面上の点 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^2$ を固定する。関数

$$f(x) := \sum_{k=1}^n |x-a_k|^2$$

が最小値を持つことを示せ。x や各 a_k は平面ベクトルであることに注意。さらに、その最小値を求めよ。