作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

前半の復習・補足：解答

解答例を読むだけではなく、もう一度、何も見ずに自力で解答が作成できるかどうか手を動かして確かめてください。

問題 1.

(1) $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$ だから

$$\operatorname{rank} g \circ f = \operatorname{rank} g.$$

一方、g を $\operatorname{Im} f$ に制限した線形写像を h とすると

$$\operatorname{rank} g \circ f = \operatorname{rank} h \leqslant \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} f.$$

等号成立は h が単射、つまり $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$ のとき、かつそのときに限る。

(2) $\operatorname{Ker} g \circ f = f^{-1}(\operatorname{Ker} g)$ であることに注意して、部分ベクトル空間 $f^{-1}(\operatorname{Ker} g) \subset U$ に f を制限した写像を h とする。h に次元定理を適用すると

$$\dim f^{-1}(\operatorname{Ker} g) = \dim \operatorname{Ker} h + \operatorname{rank} h \leqslant \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$$

となる。最後に $\operatorname{Ker} h = \operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} g$ であることを用いた。等号成立は $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ のとき、かつそのときに限る。

問題 2.

(1) この命題は偽である。$a_n = (-1)^n$ は有界だが収束しない。

(2) この命題は真である。仮定より級数 $\sum_{k=1}^n |a_k|$ は Cauchy 列だから、$\forall \varepsilon > 0$ に対しある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、$m, n \geqslant N$ のとき

$$\left| \sum_{k=1}^m |a_k| - \sum_{k=1}^n |a_k| \right| < \varepsilon$$

が成り立つ。$m \geqslant n$ としてもよい。すると、三角不等式より

$$\left| \sum_{k=1}^m a_k - \sum_{k=1}^n a_k \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^m |a_k| = \left| \sum_{k=1}^m |a_k| - \sum_{k=1}^n |a_k| \right|$$

が成り立つので、級数 $\sum_{k=1}^n a_k$ も Cauchy 列となる。実数の完備性により、$\sum_{k=1}^n a_k$ は収束する。

(3) この命題は偽である。$a_n = 1$ は $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ を満たすが、級数 $\sum_{k=1}^n a_k = n$ は収束しない。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 3. 基底 $v_1, v_2, \dots, v_n$ に関する f の表現行列を A, 別の基底 $v'_1, v'_2, \dots, v'_n$ に関する f の表現行列を A' とする。$v_1, v_2, \dots, v_n$ が基底なので、ある行列 P を用いて

$$(v'_1, v'_2, \dots, v'_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n)P$$

と書くことができる。すると P は正則行列で、

$$A' = P^{-1}AP$$

が成り立つ。一般に行列 A, B について $\det AB = \det A \det B$ が成り立つから、

$$\det A' = \det P^{-1}AP = (\det P)^{-1}(\det A)(\det P) = \det A$$

となる。

問題 4. まず、$n^{\frac{1}{n}} \geqslant 1$ だから a_n は下に有界である。前回の問題 10 解答より、$n \geqslant 3$ のとき

$$a_n \geqslant a_{n+1} \;\Leftrightarrow\; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant n$$

が成り立つ。つまり、a_n $(n \geqslant 3)$ は下に有界な単調減少数列である。実数の完備性のところで述べたように、このような数列は収束する。

問題 5. $n = 2$ としよう。固有値は固有多項式の根だから、複素数の範囲で考えれば、重複度を込めて 2 つの固有値 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ が存在する。問題は対応する固有ベクトルたちが一次独立とは限らない点にある。そこで、v_1 を α_1 の固有ベクトルとし、v_2 は α_2 と関係がないベクトルで、その代わり v_1, v_2 が基底になるようなものとして取る。すると

$$f(v_1) = \alpha_1 v_1, \quad f(v_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2$$

と書くことができる。従って、v_1, v_2 に関する f の表現行列は

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

となる。つまり上三角行列である。自動的に $a_{22} = \alpha_2$ となる。

次は $n = 3$ としよう。今度は、重複度を込めて 3 つの固有値 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ が存在する。v_1 を α_1 の固有ベクトルとし、v_2, v_3 は α_2, α_3 と関係がないベクトルで、その代わり v_1, v_2, v_3 が基底になるようなものとして取る。すると表現行列は

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

となる。右下の 2×2 行列の固有値を β_2, β_3 とすれば、$n = 2$ のときの結果から、ある正則行列 P を用いて

$$P^{-1} \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \beta_2 & * \\ 0 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

作成者：久本 智之　研究室：A343 E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

と書くことができる。すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & * \\ 0 & \beta_2 & * \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。これは f が上三角行列で表現できることを意味する。自動的に $\{\beta_2, \beta_3\} = \{\alpha_2, \alpha_3\}$ となることが分かる。

問題 6. グラフの面積を考えれば分かるように、

$$b_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \leqslant 2$$

であり、左辺は n について単調増加である。上に有界な単調増加数列はある実数に収束する。

$$a_n = b_n + \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

だから、a_n は同じ実数に収束する。

問題 7.

(1) $V = \mathbb{R}^n$ の標準基底を $e_1, e_2, \ldots, e_n$ とする。$f \in V^*$ の $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ における値は、線形性より

$$f(x) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n)$$

となる。これは n 個の変数 $x_1, \ldots x_n$ についての 1 次式である。逆に 1 次式 $a_1x_1 + \cdots a_nx_n$ が与えられると、$1 \leqslant i \leqslant n$ に対し $f(e_i) := a_i$ とすることで線形写像 $f\colon V \to \mathbb{R}$ が定まる。

(2) V の基底 $e_1, \ldots, e_n$ を取れば、$1 \leqslant i, j \leqslant n$ に対し

$$f_i(e_j) := \begin{cases} 1 & \text{if } \ i = j \\ 0 & \text{if } \ i \neq j \end{cases}$$

とすることで、V^* の要素 $f_1, \ldots, f_n$ が定まる。これらは V^* の基底を与える。だから、V は n 次元である。

(3) V の基底 $e_1, \ldots, e_n$ を固定し、$f_1, \ldots, f_n \in V^*$ を (2) の通りとする。

$v = v_1e_1 + \cdots v_ne_n \in V$ が $T(v) = 0$ を満たすとすると、勝手な $f \in V^*$ に対し $f(v) = 0$ が成り立つ。特に $f_i(v) = v_i = 0$ だから、$v = 0$ となる。これは T が単射であることを意味する。

(2) により $\dim V^* = n, \dim(V^*)^* = n$ だから、次元定理より $\operatorname{rank} T = n.$ つまり T は全射である。

問題 8. 数列の記号 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を略記して $\{a_n\}$ と書くことにする。

作成者：久本 智之　研究室：**A343**　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(1) 漸化式より $b_{n+2}+b_n=a_{n+3}+a_{n+1}=0$ なので、$\{b_n\}\in V$ である。$f\colon V\to V$ が線形写像であることを示そう。

$\{a_n\},\{a'_n\}\in V$ に対し $f(\{a_n\})=\{b_n\}$, $f(\{a'_n\})=\{b'_n\}$ と書くと、$f(\{a_n+a'_n\})=\{b_n+b'_n\}$ が成り立つ。従って

$$
\begin{aligned}
f(\{a_n\}+\{a'_n\})&=f(\{a_n+a'_n\})=\{b_n+b'_n\}\\
&=\{b_n\}+\{b'_n\}=f(\{a_n\})+f(\{a'_n\}).
\end{aligned}
$$

$c\in\mathbb{R}$, $\{a_n\}\in V$ に対し $f(\{a_n\})=\{b_n\}$ と書くと。$f(\{ca_n\})=\{cb_n\}$ が成り立つ。従って、

$$f(c\{a_n\})=f(\{ca_n\})=\{cb_n\}=c\{b_n\}=cf(\{a_n\}).$$

(2) λ が線形写像 f の固有値であるとは、あるゼロでない数列 $\{a_n\}$ に対し

$$f(\{a_n\})=\lambda\{a_n\}\ \Leftrightarrow\ a_{n+1}=\lambda a_n$$

を満たすことである。特に $a_{n+2}=\lambda a_{n+1}=\lambda^2 a_n$. 一方、$\{a_n\}\in V$ だから漸化式 $a_{n+2}+a_n=0$ が成り立つ。従って $(\lambda^2+1)a_n=0$. $\{a_n\}$ がゼロでない数列ということは適当な n に対し $a_n\neq 0$ だから、 $\lambda^2+1=0\Leftrightarrow\lambda=\pm\sqrt{-1}$ が必要である。このように求めた λ に対して改めて $a_{n+1}=\lambda a_n$ を解けば、

$$a_n=A(\pm\sqrt{-1})^n\quad(A\text{ はゼロでない複素数})$$

がそれぞれの固有値に属する固有ベクトルを与えることが分かる。f を対角化すれば、$a_{n+2}+a_n=0$ の一般解は $a_n=A(\sqrt{-1})^n+B(-\sqrt{-1})^n$ という形で与えられることが分かる。$a_{n+2}+a_n=0$ を満たす実数列も沢山あるが、実数だけを考えていては解空間の構造は見通しが悪い。

問題 9.

(1) $f\in V$ とすると $\frac{d^2}{dt^2}Df+Df=D\left(\frac{d^2}{dt^2}f+f\right)=0$ なので、$Df\in V$ となる。$f,g\in V$ に対し $D(f+g)=D(f)+D(g)$ であり、$c\in\mathbb{R},f\in V$ に対し $D(cf)=cD(f)$ が成り立つので、$D\colon V\to V$ は線形写像である。

(2) λ が線形写像 D の固有値であるとは、この場合、ゼロでない関数 $f\in V$ があって

$$\frac{df}{dt}=\lambda f$$

を満たすことである。これは 1 階の微分方程式だからより簡単に解くことができる。

$$0=\frac{d^2f}{dt^2}+f=(\lambda^2+1)f$$

で f がゼロでないから、$\lambda=\pm\sqrt{-1}$ が必要。よって固有ベクトルは

$$f(t)=Ae^{\pm\sqrt{-1}t}=A(\cos t\pm\sqrt{-1}\sin t)\quad(A\text{ はゼロでない複素数})$$

という関数で与えられる。D を対角化すれば、$\frac{d^2f}{dt^2}+f=0$ の一般解は $f(t)=Ae^{\sqrt{-1}t}+Be^{-\sqrt{-1}t}$ という形で与えられることが分かる。