作成者： 久本 智之　研究室： A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

前半の復習・補足

実施日： May 29, 2018

問題 1. U, V, W を有限次元ベクトル空間、$f\colon U \to V, g\colon V \to W$ を線形写像とする。次が成り立つことを示せ。

(1) $\operatorname{rank} g \circ f \leqslant \min\{\operatorname{rank} f, \operatorname{rank} g\}$

(2) $\dim \operatorname{Ker} g \circ f \leqslant \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$

問題 2. 収束に関する次の命題の真偽を確かめよ。答えだけでなく、$\varepsilon - N$ 論法や具体的な反例を用いて厳密に説明すること。

(1) 有界な数列 a_n は収束する。

(2) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束すれば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する。

(3) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$ ならば正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

問題 3. V を n 次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間、$f\colon V \to V$ を線形写像とする。V の基底 $v_1, \ldots v_n$ に関する f の表現行列を A としたとき、行列式 $\det A$ の値は $v_1, \ldots v_n$ の取り方に依らないことを示せ。

問題 4. 数列 $a_n := n^{\frac{1}{n}}$ がある実数に収束することを示せ。

問題 5. V を有限次元ベクトル空間とする。勝手な線形写像 $f\colon V \to V$ は、適当な基底を取れば上三角行列として表現できることを示せ。(分からなければ 2 次元や 3 次元としてもよい)

問題 6. 関数 $1/x$ の積分を利用して、数列

$$a_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n} - \log n$$

の極限が存在することを示せ。

問題 7. V を n 次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間とする。$\mathbb{R}$ への線形写像 $f\colon V \to \mathbb{R}$ の全体を V^* と書く。$c \in \mathbb{R}$ 及び $f, g \in V^*$ に対し

$$(cf)(v) := cf(v), \qquad (f+g)(v) := f(v) + g(v)$$

と定めることで、V^* はベクトル空間になる。これを V の**双対ベクトル空間**という。

(1) $V = \mathbb{R}^n$ の場合、V^* は n 変数 1 次式の全体と同一視できることを示せ。

(2) 一般の V に対する V^* の次元を求めよ。

(3) 線形写像 $T\colon V \to (V^*)^*$ を $(Tv)(f) := f(v)$ と定める。T は全単射であることを示せ。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 8. 2 項間漸化式

$$a_{n+2} + a_n = 0 \qquad (n \geqslant 1)$$

を満たす複素数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の全体を V とおくと、これは 2 次元の $\mathbb{C}$ ベクトル空間になることが分かる。

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V$ に対し、$b_n := a_{n+1}$ として定まる数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はまた V の要素であり、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を対応させる写像 $f\colon V \to V$ は線形写像であることを示せ。

(2) f の固有値を全て求め、付随する固有ベクトルを 1 つずつ挙げよ。

問題 9. 2 階の微分方程式

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + f = 0 \qquad (n \geqslant 1)$$

を満たす C^2 級関数 $f(t)$ で複素数に値を取るもの全体を V とおく。微分方程式を解けば、これは 2 次元の $\mathbb{C}$ ベクトル空間になることが分かる。

(1) 関数 $f \in V$ に対し、$Df := \dfrac{df}{dt}$ はまた V の要素であり、f に Df を対応させる写像 $D : V \to V$ は線形写像であることを示せ。

(2) D の固有値を全て求め、付随する固有ベクトルを 1 つずつ挙げよ。

補足 1. 問題 9 のような話は、係数を有理関数にすると俄然面白くなってくる。例えば、超幾何微分方程式 (の 1 つ)

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{2z-1}{z(z-1)}\frac{df}{dz} + \frac{1}{4z(z-1)} f = 0$$

が典型である。既に (固有値のことなどを考えれば)f の値域として複素数を取るべきだということが分かったが、ここまで来れば変数 z も複素数とするのは自然だろう。すなわち、解 f として領域 $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ 上の解析関数を考える。すると、領域に穴が空いているため、大域解は**多価関数**になってしまう。これは

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{df}{dz} = 0$$

の解 $f(z) = A \log z + B$ が $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上で一価解析関数にならないのと同じような理由である。それでも、局所解の集合 V は 2 次元の $\mathbb{C}$ ベクトル空間になる。最初の方程式の場合、0 でない定数関数は解にならないから、単に次元が 2 というだけでなく本質的に 2 つ解がある。このとき、多価性は**モノドロミー**と呼ばれる V の線形変換によって記述される。

上記微分方程式の解は楕円曲線 $y^2 = x(x-1)(x-z)$ の周期を与え、代数・幾何・解析いずれの側面からも興味深いテーマである。