作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

級数：解答

解答例を読むだけではなく、もう一度、何も見ずに自力で解答が作成できるかどうか手を動かして確かめてください。

問題 1. まず勝手な自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

が成り立つ。$|z| < 1, n \to \infty$ のとき右辺が $\frac{1}{1-z}$ に収束することを示すため、

$$\left| \frac{1}{1-z} - \frac{1-z^n}{1-z} \right| = \frac{|z|^n}{|1-z|}$$

を評価する。$|1 - z| \geqslant 1 - |z|$ だから、$\varepsilon > 0$ に対し $N > \frac{\log(1-|z|)\varepsilon}{\log|z|}$ とすれば、$n \geqslant N$ に対し

$$\left| \frac{1}{1-z} - \frac{1-z^n}{1-z} \right| < \varepsilon$$

が成り立つ。N は ε と $|z|$ だけで決まり、z の角度には依らないことに注意せよ。

問題 2.

(1) $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ と置くと

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to 0 - 0 = 0$$

だから $a_n \to 0$.

(2) $a_n = \dfrac{1}{n}$ が反例になる。この無限和が発散することは

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1)$$

から分かる。ただし、発散の速度は極めて遅いことが知られている。

問題 3.

(1) d'Alembert の判定を適用する。

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &:= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geqslant m} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geqslant m} \frac{n+1}{2n} = \lim_{m\to\infty} \frac{m+1}{2m} = \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

だから、無限級数は有限の値に収束する。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(2) $\frac{2n^2}{n^3+1} \geqslant \frac{1}{n}$ で、$\sum \frac{1}{n}$ が発散するから、問題の級数も発散する。

(3) Cauchy-Hadamard の判定を適用する。

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} := \lim_{m\to\infty}\sup_{n\geqslant m}(a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{m\to\infty}\sup_{n\geqslant m}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

ここで $n \geqslant 1$ に対し

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leqslant \frac{1}{2}$$

だから、無限級数は有限の値に収束する。

(4) d'Alembert の判定を適用する。

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \limsup_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1$$

だから、無限級数は有限の値に収束する。

(5) 各項を有理化すれば

$$\sqrt{n^2+1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \geqslant \frac{1}{2n}.$$

$\sum \frac{1}{n}$ が発散するから、問題の無限級数も発散する。

(6) $m \geqslant 2$ に対し

$$\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{n^2} \leqslant \int_1^{m-1}\frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{m-1}$$

が成り立つ。従って無限級数は有限の値に収束する。Euler-Maclaurin の条件は (あるいは、他の判定条件でも)、このように状況に応じて自分で証明し直せばよい。

問題 4. 問題 2 より $a_n \to 0$. 級数の収束を論じる上で、有限の項は無視できるから、$a_n < 1$ としてよい。すると $a_n^d < a_n$ なので $\sum_{n=1}^m a_n^d \leqslant \sum_{n=1}^m a_n$. $m \to \infty$ とすれば右辺は仮定より有限の値に収束するから、左辺も有限の値に収束する。

問題 5.

(1) 仮定より、$\limsup(a_n)^{\frac{1}{n}} < r'$ となる $r' < 1$ が存在する。上極限の定義に戻って考えると、$\forall\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m \geqslant N \ \Rightarrow\ \sup_{n\geqslant m}(a_n)^{\frac{1}{n}} - r' < \varepsilon$$

が成り立つ。$r := r' + \varepsilon < 1$ とすれば $n \geqslant N$ に対して $a_n \leqslant r^n$ が成り立つ。

(2) 級数の収束を論じる上で、有限の項は無視できるから、(1) より $a_n \leqslant r^n$ としてよい。すると $\sum_{n=1}^m a_n \leqslant \sum_{n=1}^m r^n$. $m \to \infty$ とすれば右辺は問題 1 により有限の値に収束するから、左辺も有限の値に収束する。なお、同じ議論で

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} > 1 \ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

となることが分かる。d'Alembert の判定についても同様の事実が成り立つ。

問題 6. 原点に戻ってくるのは偶数秒目だけで、$2n$ 秒のうち n 秒が原点から離れる方向に、残りの n 秒が原点に近く方向に移動する。そのような移動の仕方は

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{(n!)^2}$$

通りあるから、求める期待値は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2^{2n}} \frac{2n!}{(n!)^2}$$

となる。d'Alembert の判定を用いると

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &:= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geqslant m} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geqslant m} \frac{(2n+2)^2(2n+1)}{4(n+1)^2} = 2 > 1\end{aligned}$$

となり、問題 5(2) の解答で注意したことから期待値が発散することが分かる。

問題 7.

(1) 第 1 項は 1/2 とする。第 2 項以下は残った数のうち最も小さい数を与え、次に最も大きい数から順に足すことで和を 0 にする。0 を得たら同じことを繰り返す。

(2) 第 1 項は 1/2 とする。第 2 項以下は残った数のうち最も小さい数を与え、次に最も大きい数から順に足すことで和を 1 にする。1 を得たら同じことを繰り返す。

問題 8.

(1) 各項の絶対値を取った級数は $\sum \frac{1}{2n-1} \geqslant \frac{1}{2}\sum \frac{1}{n}$ となるからこれは発散する。

(2) 各項の絶対値を取った級数は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$

となる。z を固定して Cauchy-Hadamard の判定を適用すれば、

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} &:= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geqslant m}(a_n)^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geqslant m} \frac{|z|}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = 0 < 1\end{aligned}$$

なので、正項級数 $\sum a_n = \sum \frac{|z|^n}{n!}$ は収束する。よって $\sum \frac{z^n}{n!}$ は絶対収束する。(別に d'Alembert でもよい。)

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(3) 各項の絶対値を取った級数は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathrm{Re} z}}$$

となる。z を固定して Euler-Maclaurin の判定を適用すれば、

$$\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n^{\mathrm{Re} z}} \leqslant \int_{1}^{m-1} \frac{dx}{x^{\mathrm{Re} z}}$$

となり、$\mathrm{Re} z > 1, m \to \infty$ のとき右辺は有限の値に収束する。従って正項級数 $\sum \frac{|z|^n}{n!}$ は収束し、よって $\sum \frac{z^n}{n!}$ は絶対収束する。

問題 9. 積分による評価を、$n = 4$ 以降で行う。これにより

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \int_{4}^{m+1} \frac{dx}{x} \leqslant \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} \leqslant 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \int_{3}^{m} \frac{dx}{x}$$

が成り立つ。$m \to \infty$ とすれば

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \int_{4}^{\infty} \frac{dx}{x} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \int_{3}^{\infty} \frac{dx}{x}$$

これを計算すると $1.6 < \sum \frac{1}{n^2} < 1.7$ を得る。

問題 10. 両辺が収束することは既に示した。特に、第 5 回問題 5 の解答より

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}$$

が成り立つ。特に $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ だから、$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ となる。一方、$N \leqslant n$ を固定すると

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} \\ &\geqslant \sum_{k=0}^{N} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}\end{aligned}$$

だから、$n \to \infty$ とすれば $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$ よって $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ となる。さて、

$$\frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \cdots \leqslant \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \cdots = \frac{1}{2^5}$$

だから

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{2^5}.$$

これを計算すれば $2.7 < e < 2.8$ を得る。

問題 11. 2 項定理より

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{z^i}{i!} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{w^j}{j!} = \sum_{n=1}^{m} \frac{(z+w)^n}{n!}$$

が成り立つ。$k, \ell, m \to \infty$ とすれば $e^{z+w} = e^z e^w$ となる。