作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

級数

実施日：May 15, 2018

数列 a_n を足してできる

$$a_1 + \cdots + a_n$$

という形の数列を、**級数**という。このような数列の極限が存在するとき、それを**無限級数の和**と呼んで、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

のように書く。一般に a_n は複素数を考えることができる。

問題 1. $z \in \mathbb{C}, 0 < |z| < 1$ に対し $a_n = z^n$ の定める無限級数の和が $\dfrac{z}{1-z}$ に等しいことを示せ。

問題 2.

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば $a_n \to 0$ であることを示せ。

(2) (1) の逆は成り立たないことを示せ。

正項級数の収束

命題 1. 各 a_n が非負実数であるような級数 $\sum_{k=1}^{n} a_n$ を**正項級数**という。正項級数の和は $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ の範囲で確定し、和の順序を変更してもその値は変わらない。

正項級数の和が有限の値に収束するかどうかについては色々な判定法がある。

定理 1. 以下のいずれかを満たす正項級数 $\sum_{k=1}^{n} a_n$ は有限の値に収束する。

- $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ 　(d'Alembert の条件)
- $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} < 1$ 　(Cauchy-Hadamard の条件)
- $x \geqslant 1$ で定義された非負単調減少関数 $f(x)$ によって $a_n = f(n)$ と書けていて、積分

  $$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

  が有限の値に収束する。
  (Euler-Maclaurin の条件。より一般には区分求積の原理と呼ばれるもの)

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 3. (発表課題) 以下の正項級数和が有限の値に収束するか判定せよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{n^3+1}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$ (6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

問題 4. d を自然数とする。正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が有限の値に収束するならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^d$ も有限の値に収束することを示せ。

問題 5.

(1) 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して $\limsup_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}<1$ が成り立つとすると、ある $0\leqslant r<1, N\in\mathbb{N}$ が存在して

$$n\geqslant N \ \Rightarrow\ a_n\leqslant r^n$$

となることを示せ。

(2) (1) と問題 1 を用いて Cauchy-Hadamard の判定法を証明せよ。

問題 6. 数直線上の整数点にいる人が、1 秒後には隣の整数点にそれぞれ 1/2 の確率で移るものとする。彼が 0 秒目に原点を出発したとき、何秒目で原点に戻ってくるだろうか。その期待値が

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2^{2n}}\frac{2n!}{(n!)^2}$$

で与えられることを示し、この無限級数の和が有限の値に収束するか判定せよ。

絶対収束

命題 2. 絶対値を取った無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が有限の値に収束するとき、無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は**絶対収束**するという。絶対収束する数列は和の順序を変更してもその値が変わらない。

問題 7. (発表課題) 0 に収束する無限級数

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

を考える。

作成者 : 久本 智之　研究室 : A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(1) 和の順序を交換し

$$\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)+\cdots$$

としたものは $\frac{1}{2}$ に収束することを示せ。(どのように順序を変更しているか説明せよ)

(2) 和の順序を交換し

$$\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)$$
$$+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}\right)+\cdots$$

としたものは発散することを示せ。(どのように順序を変更しているか説明せよ)

問題 8. (必修問題) 次の無限級数和が絶対収束するか判定せよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

(2) 固定された $z\in\mathbb{C}$ に対する $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

(3) 固定された $z\in\mathbb{C}, \mathrm{Re}\, z>1$ に対する $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$

級数に関する、より具体的な問題

問題 9. 問題 3(6) の議論を精密化することによって、不等式評価

$$1.6<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<1.7$$

を示せ。※この値が $\pi^2/6$ であることを示しても、それが 1.6 と 1.7 の間にあることは明らかではない。むしろこの種の議論によって円周率の大きさが評価される。

問題 10. (必修問題) 自然対数の底の 2 つの定義が一致すること、すなわち

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

を示せ。さらに、左辺を用いて

$$2.7<e<2.8$$

を示せ。

問題 11. $z\in\mathbb{C}$ に対し

$$e^z:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

と定義する。勝手な $z,w\in\mathbb{C}$ に対し $e^{z+w}=e^ze^w$ が成り立つことを示せ。