作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

実数の完備性：解答

解答例を読むだけではなく、もう一度、何も見ずに自力で解答が作成できるかどうか手を動かして確かめてください。

問題 1. $m, n \in \mathbb{N}, m \geqslant n$ に対し

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &\leqslant |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_n| \\ &\leqslant (r^{m-n-1} + r^{m-n-2} + \cdots + r + 1)\,|a_{n+1} - a_n| \\ &= \frac{1}{1-r}\,|a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{r^{n-1}}{1-r}\,|a_2 - a_1| \end{aligned}$$

と評価できる。$\varepsilon > 0$ を任意に取り固定すると、$N \in \mathbb{N}$ として $\frac{r^{N-1}}{1-r}\,|a_2 - a_1| < \varepsilon$ となるものを取れば

$$m, n \geqslant N \;\Rightarrow\; |a_m - a_n| \leqslant \varepsilon$$

が保証される。

問題 2.

(1) $M_1 \in \mathcal{M}$ より、A の元は M_1 以下である。だから、区間 $[a_1, M_1]$ に A の元が無いということは、A の元は a_1 以下でなければならない。つまり $a_1 \in \mathcal{M}$ となる。一方、$a_1 \in A$ なので、a_1 は $\mathcal{M}$ で最小でなければならない。

(2) 作り方より $|M_{n+1} - M_n| \leqslant 2^{-n}(M_1 - a_1)$ が成り立つので、問題 1 と同様にして M_n が Cauchy 列であることが分かる。また、$|M_n - a_n| \leqslant 2^{-n+1}(M_1 - a_1)$ に注意すれば、$a_n \to M$ であることが分かる。

(3) M_n は上から M に収束するから、M より大きい A の元は存在し得ない。

問題 3.

(1) n を十分大きく取れば $|M_{n+1} - M_n| \leqslant 2^{-n}(M_1 - a_1)$ の右辺がいくらでも小さくなるという事実は、Archimedes の性質に拠る。

(2) Archimedes の性質は部分集合 $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ が上に有界でないということを言っている。仮に $A := \mathbb{N}$ が上に有界とすると、定理 2 から A は上限 $M \in \mathcal{M}$ を持つ。上限の定義より、$x < M$ となる勝手な実数 x に対し、ある $a \in A$ が存在して $x < a$ が成り立つ。特に $x := M - 1$ と取れば $M - 1 < a$ よって $M < (a + 1) \in \mathbb{N}$ であるが、これは上界の定義に反する。

問題 4. $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots$ を上に有界な単調増加数列とする。これらの数全体を A と置いて定理 2 を適用すると、上限 $M \in \mathcal{M}$ が得られる。勝手な $\varepsilon > 0$ に対し (上限の定義より) $M - \varepsilon < a_N$ となる $a_N \in A$ が存在するが、単調性より

$$n \geqslant N \;\Rightarrow\; 0 \leqslant M - a_n \leqslant M - a_N < \varepsilon$$

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

だから $a_n \to M$ が従う。

問題 5.

(1) 二項定理を用いて分解すれば、

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}$$

と書ける。同様に

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\frac{1}{k!}$$

だから、2 つの式の右辺を各項ごとに比べれば $a_n \leqslant a_{n+1}$ を得る。

(2) やはり二項定理を用いれば、n に依らず

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{1}{n^k} \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} \leqslant 3$$

と評価できる。

問題 6. 算術平均 $\geqslant$ 幾何平均だから、$n \geqslant 2$ に対し $a_n \geqslant b_n$. すると

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \leqslant a_n, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geqslant b_n$$

となって、$a_n \geqslant b_1$ だから a_n は下に有界な単調減少列である。同様に b_n は上に有界な単調増加列である。定理 3 を適用すれば極限 $a_n \to a, b_n \to b$ を得る。$a_n \geqslant b_n$ だから $a \geqslant b$ となり、さらに

$$a = \frac{a+b}{2}, b = \sqrt{ab}$$

が成り立つ。つまり $a = b$ でなければならない。

問題 7.

(1) (A, B) を $\mathbb{R}$ の切断とする。A は上に有界だから、定理 2 より、上限 $M \in \mathbb{R}$ が存在する。切断の定義により $M \in A$ または $M \in B$ が成り立つ。$M \in A$ ならば M は A の最大元である。従って M は B の下限だが、$M \in B$ とするとこれは切断の定義に反する。よって B は最小元を持たない。同様に、$M \in B$ ならば M は B の最小元であり、A は最大元を持たない。

作成者：久本 智之　研究室：**A343**　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(2) 勝手な Cauchy 列 c_n が収束することを示す。まず一般に Cauchy 列は有界であることが分かる。というのは、$m, n \geqslant N \Rightarrow |c_m - c_n| < 1$ となる N が取れるので

$$|c_m| \leqslant |c_m - c_N| + |c_N| < 1 + |c_N|$$

と評価できるからである。だから、全ての c_n が区間 $[a_1, b_1]$ に含まれるような実数 a_1, b_1 が取れる。この区間を 2 等分すると、どちらか一方は無限個の c_n を含まなければならない。そのような区間を 1 つとり、左端点を a_2, 右端点を b_2 とする。以下同様に $[a_n, b_n]$ を 2 等分して無限個の c_n が $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ に含まれるように取る。区間幅は半減していくから $a_n - b_n \to 0$ である。すると、定理 5 より $\lim a_n = \lim b_n = \alpha$ となる実数 α が存在する。作り方から、c_n の部分列 c_{n_k} $(k = 1, 2, \ldots)$ で $\lim_{k\to\infty} c_{n_k} \to \alpha$ となるものがある。c_n が Cauchy 列だから、これは $c_n \to \alpha$ を意味する。なぜならば、勝手な $\varepsilon > 0$ に対し、ある N があって $k \geqslant N$ なら $|c_{n_k} - \alpha| < \varepsilon/2$ となり、さらに Cauchy 性より $m, k \geqslant N \Rightarrow |c_m - c_{n_k}| < \varepsilon/2$ としてよいので

$$|c_m - \alpha| \leqslant |c_m - c_{n_k}| + |c_{n_k} - \alpha| < \varepsilon.$$

問題 8. 問題 8(2) の解答と同様なので省略する。
※私の解答例はたまに略解になっていますが、皆さんは細かいところまで丁寧に説明してください。