作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

実数の完備性

実施日：May 15, 2018

完備性

数の概念は次のように拡張してきた。

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \cdots$$

有理数に留まらず実数を考える理由はなんだろうか。それは、実数が極限について閉じているということである。尤も、$a_n = n$ のように発散する数列や、$a_n = (-1)^n$ のように振動する数列の極限を考えても仕方がない。そこで Cauchy 列というものを考える。

定義 1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n, m \geqslant N \ \Rightarrow \ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

となる数列 a_n を **Cauchy 列**という。

既に見たように、収束する数列は必ず Cauchy なのだった。

定理 1. [実数の完備性] 実数からなる Cauchy 列 a_n は、必ずある実数 α に収束する。

問題 1. ある $0 < r < 1$ が存在して

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqslant r\,|a_{n+1} - a_n|$$

を満たす数列 a_n は収束する。定理 1 を用いてこのことを示せ。

定理 2. 空でない部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対し

$$\mathcal{M} := \left\{ y \in \mathbb{R} : \forall x \in A \ \ x \leqslant y \right\}$$

の元を A の**上界**という。$\mathcal{M}$ の最小元を A の**上限**という。A が上に有界、すなわち $\mathcal{M}$ が空でないとき、A は上限を持つ。

問題 2. (発表課題) 定理 1 から定理 2 を示したい。$a_1 \in A$, $M_1 \in \mathcal{M}$ をまず勝手に取る。a_1 と M_1 の間に A の元が無ければ a_1 が A の上限となるので、a_1 と M_1 の間に A の元があるとしてよい。このとき、区間 $[a_1, M]$ を等分する。等分したもののうち右側に A の元がなければ、$a_2 = a_1$, M_2 を等分点とする。右側に A の元があれば、そのうちの一つを a_2 とし、$M_2 = M_1$ とする。いずれの場合も再び $[a_2, M_2]$ を等分し、この操作を繰り返す。このようにして数列 a_n, M_n を得る。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(1) a_1 と M_1 の間に A の元が無ければ a_1 が A の上限となることを示せ。

(2) 定理 1 を用いて、M_n はある実数 M に収束することを示せ。さらに、$a_n \to M$ であることを示せ。

(3) $M \in \mathcal{M}$ を示せ。

問題 3.

(1) 定理 1 から定理 2 を導く仮定で、実は **Archimedes の性質**:

勝手な実数 a に対し、ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $n > a$ を満たす

を用いている。それはどこか。

(2) 定理 2 から Archimedes の性質が導かれることを示せ。(ヒント: 仮に $A = \mathbb{N}$ が上に有界であるとして定理 2 を適用し、矛盾を導け。)

問題 4. 定理 2 から次の定理 3 が導かれることを示せ。

定理 3. 上に有界な単調増加数列は収束する。同様に、下に有界な単調減少数列は収束する。

このように、上限や極限が実数の範囲内に存在することは、非自明な主張である。そもそもそのような都合のよい性質を満たす数の集合が存在するという事実 (実数体の構成) が明らかではない。

問題 5. (発表課題) 数列

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

がある実数に収束することを示したい。

(1) a_n は単調増加であることを示せ。

(2) a_n は上に有界であることを示せ。

問題 6. $a_1, b_1 > 0$ から始めて数列 a_n, b_n を次のように帰納的に定める。

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

a_n, b_n は共通の実数に収束することを示せ。

上の問題から分かるように、極限の値が具体的に求められることは稀で、それでも極限の存在が言えるということが大切である。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

定理 4. [**Dedekind の切断**] 実数体 $\mathbb{R}$ を 2 つの (空でない) 部分集合 A, B の合併として表す。このとき、

$$a \in A, b \in B \Rightarrow a \leqslant b$$

となる組 (A, B) を $\mathbb{R}$ の**切断**と呼ぶ。任意の切断に対し次のいずれかが成り立つ。

- A が最大元を持ち、B は最小元を持たない。
- A は最大元を持たず、B が最小元を持つ。

問題 7.

(1) 定理 2 から定理 4 を導け。

(2) 逆に定理 4 から定理 2 が従うことを示せ。(ヒント: $B = \mathcal{M}$ とする)

定理 5. [**区間縮小法**] 閉区間 $[a_n, b_n]$ が

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \leqslant b_n \leqslant \cdots \leqslant b_2 \leqslant b_1, \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$$

を満たすとする。このとき、$\lim a_n = \lim b_n = \alpha$ となる実数 α が存在する。

問題 8.

(1) 定理 3 から定理 5 を導け。

(2) 逆に定理 5 から定理 1 が従うことを示せ。

問題 9. 定理 5 を用いて、有界な実数列は集積値を持つことを示せ。

要はいずれかの性質を満たすように実数が構成できればよい。実数体を初めて具体的に構成したのは Dedekind で、定理 4 を足掛かりにした。(まず定理 4 が自然に成り立つように実数体を構成した。) それは多くの教科書に載っているので、ここでは定理 1 に基づいた構成法を述べておく。

問題 10. (付録) [**実数体の構成**] 有理数からなる Cauchy 列全体が成す集合を $\mathcal{C}$ と書く。Cauchy 列であるという条件は

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \ \exists N \in \mathbb{N}, \quad n, m \geqslant N \Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{1}{k}$$

と書き換えられるから、「有理数からなる Cauchy 列」というのは実数を使わず定義できている。2 つの Cauchy 列 a_n, b_n が

$$a_n - b_n \to 0$$

を満たすという関係は、同値関係になる。この同値関係による $\mathcal{C}$ の商集合を R と定める。

作成者： 久本 智之　研究室： A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(1) 集合 R には自然なやり方で順序が入り、四則演算が定められる。勝手な有理数 $q \in \mathbb{Q}$ は、Cauchy 列 $a_n = q$ が定める R の元と同一視できる。

(2) R の点列 $r_1, r_2, \ldots$ を考える。それぞれの r_i は、ある Cauchy 列 $\{a_{i,n}\}_{n=1}^{\infty}$ の定める同値類である。r_i がある $r \in R$ に収束することを、勝手な k に対しある $I \in \mathbb{N}$ が存在して

$$i \geqslant I \ \Rightarrow\ \exists N\ \forall n \geqslant N\ \ |a_{i,n} - a_n| < \frac{1}{k}$$

を満たすことと定義する。

このとき、勝手な $r \in R$ に収束する有理数列が取れることを示せ。

(3) さらに、点列 $r_i \in R$ が Cauchy 列であるということを、勝手な k に対しある $I \in \mathbb{N}$ が存在して

$$i, j \geqslant I \ \Rightarrow\ \exists N\ \forall n \geqslant N\ \ |a_{i,n} - a_{j,n}| < \frac{1}{k}$$

を満たすことと定義する。このとき定理 1 に相当する事実が成り立つことを示せ。

上の構成で、Cauchy 列の定義を素数 p によって

$$\forall k\ \ \exists N,\ \ n, m \geqslant N\ \Rightarrow\ a_n - a_m \text{が}\ p^k\ \text{で割り切れる}$$

と変更すると、$\mathbb{R}$ とは違う $\mathbb{Q}$ の完備化が得られる。これを p **進数体** $\mathbb{Q}_p$ と呼ぶ。$\mathbb{Q}_p$ は極限について閉じた数の体系であるが、Archimedes 的性質を満たさない。