作成者： 久本 智之　研究室： **A343**　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

抽象ベクトル空間：解答

解答例を読むだけではなく、もう一度、何も見ずに自力で解答が作成できるかどうか手を動かして確かめてください。

問題 1.

(1) $\{a_n\}, \{b_n\} \in V$ とすると

$$a_{n+2} + b_{n+2} = (5a_{n+1} - 6a_n) + (5b_{n+1} - 6b_n) = 5(a_{n+1} + b_{n+1}) - 6(a_n + b_n)$$

より、$\{a_n\} + \{b_n\} := \{a_n + b_n\}$ も V に属する。定数倍についても同様である。等比数列 $a_n = r^n$ で V に属するものを考えると、

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \Leftrightarrow r^2 - 5r + 6 = 0$$

だから、$a_n = 2^n, 3^n$ は V に属することが分かる。こうして得られた 2 つの数列は V において一次独立である。さて、線形写像 $f \colon V \to \mathbb{R}^2$ を

$$f(\{a_n\}) := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

によって定める。漸化式の存在から、f は全射である。さらに、$\operatorname{Ker} f = \{0\}$ であることも漸化式から分かる。従って f は 1 対 1 の線形写像 (同型写像) であり、V が 2 次元ベクトル空間であることが導かれる。特に $a_n = 2^n, 3^n$ は V の基底を与える。

※ここでは線形写像の使い方を示すため、敢えて少し洗練された証明を与えている。$a_n = 2^n, 3^n$ が基底になることは、直接漸化式を解いても証明できる。詳しくは演習 II のプリントを見よ。上の証明を見ると、線形写像を使うことでいつの間にか漸化式が解けていることに注目してほしい。

(2) $f, g \in V$ とすると

$$(f+g)(\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) + g(\sqrt{2}) = 0 + 0 = 0$$

より、$f + g \in V$. 定数倍についても同様である。

さて、高々2 次の実係数多項式全体が成すベクトル空間を V とする。これは基底 $1, x, x^2$ を持つので、3 次元のベクトル空間である。線形写像 $T \colon V \to \mathbb{R}$ を

$$T(f) := f(\sqrt{2})$$

によって定める。W の定義より $\operatorname{Ker} f = W$ であることに注意せよ。与えられた実数 a に対し $T(a) = a$ だから、f は明らかに全射である。すると次元定理から W は 2 次元であることが従う。あとは適当に 1 次独立な元を 2 つ取ってくればよい。$(x - \sqrt{2}), (x - \sqrt{2})^2 \in W$ が最も標準的だろう。

※ $(x - \sqrt{2}), (x - \sqrt{2})^2 \in W$ が基底になることを直接計算で示すことも勿論できるが、次元定理を用いた方が遥かに単純である。その代わり、T のような適切な線形写像を状況に応じて見つける必要がある。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 **2.**

(1) 紛らわしいので、複素数の全体をひとまず K と置こう。どんな複素数も 1 という元の複素数倍で表せるから、K を $\mathbb{C}$ ベクトル空間とみなすと、1 だけからなる基底が取れることになる。一方、K を $\mathbb{R}$ ベクトル空間とみなすと、1 と虚数単位 i からなる基底が取れる。

(2) $1, \xi$ が V を張ることは $\xi^2 = i = -1 + \sqrt{2}\xi$ および $\xi^3 = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = -\sqrt{2} + \xi$ より従う。次に $1, \xi$ の一次独立性を示す。$a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ が $a_0 + a_1\xi = 0$ を満たすとすると、実部と虚部に分けて $a_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}a_1 = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}a_1 = 0,$ 従って $a_0 = a_1 = 0$ が成り立たねばならない。※実は $V = \mathbb{C}$ である。

定義より $1, \xi, \xi^2, \xi^3$ は W を生成する。これらが一次独立であることを示そう。$a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}$ が $a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 = 0$ を満たしていると仮定する。ξ^2, ξ^3 と ξ の関係から

$$\begin{aligned} 0 = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 &= a_0 + a_1\xi + a_2(-1 + \sqrt{2}\xi) + a_3(-\sqrt{2} + \xi) \\ &= \left(a_0 + \frac{a_1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}a_3 + \frac{a_3}{\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{a_1}{\sqrt{2}} + a_2 + \frac{a_3}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

すると実部と虚部はともにゼロでなければならないので、$a_0 + \frac{a_1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}a_3 + \frac{a_3}{\sqrt{2}} = \frac{a_1}{\sqrt{2}} + a_2 + \frac{a_3}{\sqrt{2}} = 0.$ これは次のように整理できる。

$$\begin{cases} a_0 + \sqrt{2}\left(\frac{a_1}{2} - \frac{a_3}{2}\right) = 0, \\ a_2 + \sqrt{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

$a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}$ なので $a_0 = \frac{a_1}{2} - \frac{a_3}{2} = 0,\ a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2} = 0$ が必要。これを解けば $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ が結論される。

問題 **3.** $f, g \in V$ とすると

$$T(f+g) = \int_0^x (f+g)(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_0^x g(t)dt = T(f) + T(g)$$

定数倍についても同様である。

$T(1) = x, T(x) = x^2/2, T(x^2) = x^3/3$ だから

$$T(1, x, x^2) = (1, x, x^2, x^3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

となる。

問題 **4.**

(1) 空間ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対しその定数倍 $c\boldsymbol{x}$ は「$\mathbf{0}, \boldsymbol{x}$ を結ぶ線分を原点を固定して c 倍に引き伸ばした線分」の端点で与えられる。この線分を回転させると、「$\mathbf{0}, f(c\boldsymbol{x})$ を端点とする線分」になる。線分を引き延ばしてから回転させても、回転させてから引き延ばしても得られるものは変わらないから、$f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$ が成り立つ。

空間ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対しそれらの和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ は「$\mathbf{0}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を頂点とする平行四辺形」の残りの頂点で与えられる。この平行四辺形を回転させると、「$f(\mathbf{0}), f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ を頂点とする平行四辺形」になる。従って $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ が成り立つ。

(2) 求める行列は以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) x 軸に関する α 回転 $\rho_{x,\alpha}$ と y 軸に関する β 回転 $\rho_{y,\beta}$ を順番に合成することによって、回転軸 ℓ を z 軸に重ねることができる。すると写像の合成 $\rho_{y,\beta} \circ \rho_{x,\alpha} \circ f \circ \rho_{x,\alpha}^{-1} \circ \rho_{y,\beta}^{-1}$ は z 軸の点を動かさない線形変換で、しかも長さや角度を保つ。このようなものは、ある $\rho_{z,\gamma}$ に一致する*。つまり

$$\rho_{y,\beta} \circ \rho_{x,\alpha} \circ f \circ \rho_{x,\alpha}^{-1} \circ \rho_{y,\beta}^{-1} = \rho_{z,\gamma} \ \Leftrightarrow\ f = \rho_{x,\alpha}^{-1} \circ \rho_{y,\beta}^{-1} \circ \rho_{z,\gamma} \circ \rho_{y,\beta} \circ \rho_{x,\alpha}$$

となる。

*これは直感的には認められる事実だと思うが、本当は証明が必要である。$\mathbb{R}^3$ の線形変換 g が内積を保つ、すなわち

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 \quad \langle g(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{y}) \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$$

を満たすとき、g は直交変換であるという。ベクトルの長さや角度は内積を用いて表されるから、直交変換は特に長さや角度を保つ。逆に長さや角度を保つ線形変換は直交変換である。今の場合 $g = \rho_{y,\beta} \circ \rho_{x,\alpha} \circ f \circ \rho_{x,\alpha}^{-1} \circ \rho_{y,\beta}^{-1}$ は z 軸の点を動かさないので、それと直交する xy 平面上の点は g によって xy 平面上の点に移される。すなわち、g は xy 平面の直交変換を定める。表現行列の成分についてこの条件を書き下せば、このような平面上の変換は回転しかないことが分かる。演習 II 第 7 回の問題 6 も参照せよ。

問題 5.

(1) $v, v' \in \mathrm{Ker}\, f$ とすると、f の線形性より

$$f(v+v') = f(v) + f(v') = 0 + 0 = 0$$

だから $v + v' \in \mathrm{Ker}\, f$. $w, w' \in \mathrm{Im}\, f$ とすると、ある $v, v' \in V$ を用いて $f(v) = w, f(v') = w'$ と書くことができる。f の線形性より

$$w + w' = f(v) + f(v') = f(v+v')$$

で、$v + v' \in V$ だから $w + w' \in \mathrm{Im}\, f$.

(2) f が単射とする。$\forall v \in \operatorname{Ker} f$ について $f(v) = f(0)$ が成り立つので、単射性より $v = 0$ すなわち $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ となる。

逆に $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ とする。$f(v) = f(v')$ となる $v, v' \in V$ を勝手に取ると、$f(v - v') = f(v) - f(v') = 0$ なので $v - v' \in \operatorname{Ker} f$. よって $v - v' = 0$ となる。これは f が単射であることを意味する。

(3) これは $\operatorname{Im} f$ の定義より明らか。

問題 6. 行列 A の階数とは、列ベクトル $(A_{ij})_{i=1}^m$ のうち何本までが一次独立かという数であった (A_{ij} は行列 A の成分)。今の場合

$$f(v_1, \dots, v_n) = (w_1, \dots, w_m)A$$

となっていて、f の階数は $f(v_j) = \sum_{i=1}^m A_{ij} w_i$ のうち幾つが一次独立かという数である。$1 \leqslant j \leqslant n$ のうち有限個 $j_1, \dots j_r$ を取って仮に $\sum_{k=1}^r c_k f(v_{j_k}) = 0$ が成り立っているとすると

$$0 = \sum_{k=1}^n c_k f(v_{j_k}) = \sum_{k=1}^r c_k \sum_{i=1}^m A_{ij_k} w_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^r c_k A_{ij_k} \right) w_i.$$

w_i たちは基底だから、勝手な i について $\sum_{k=1}^r c_k A_{ij_k} = 0$ となる。今の議論を逆に追うと、$\sum_{k=1}^r c_k A_{ij_k} = 0$ が成り立っていれば $\sum_{k=1}^r c_k f(v_{j_k}) = 0$ となることも分かる。これは $f(v_{j_k})$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ の一次独立性と r 本の列ベクトル $(A_{ij_k})_{i=1}^m$ の一次独立性が同値であることを意味する。

問題 7. $\dim V = 3$ は基底 $1, z, z^2$ が取れることから確かめられる。$\frac{df}{dz} = a_1 + 2a_2 z$ だからこれがゼロとなるのは $f(z) = a_0$ に限る。よって $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. $\operatorname{rank} f = 2$ については、問題 6 を利用すれば簡単にチェックできる。

※この場合 $\operatorname{rank} f = 2$ を確かめる一番簡単な方法は次元定理を用いるものだろう。

問題 8.

(1) $\{a_n\} \in V$ とすると

$$\begin{aligned}\text{数列 } c\{a_n\} \text{ の } n+N \text{ 番目の項} &= \{ca_n\} \text{ の } n+N \text{ 番目の項} \\ &= \{ca_{n+N}\} = \{ca_n\} = \text{数列 } c\{a_n\} \text{ の } n \text{ 番目の項}\end{aligned}$$

だから、$c\{a_n\} \in V$ となる。加法についても同様。

(2) 各 $1 \leqslant j \leqslant N$ に対して数列 $\{\delta_{j,n}\}_{n=1}^\infty$ を

$$\delta_{j,n} := \begin{cases} 1 & (\text{if } \ n = j \mod N) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定めると、$\{\delta_{1,n}\}, \{\delta_{2,n}\}, \dots, \{\delta_{N,n}\}$ は V の基底を与える。特に $\dim V = N$.

作成者：久本 智之　研究室：**A343**　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(3) ξ が 1 の原始 N 乗根だから

$$a'_{n+N} = \sum_{k=1}^{N} a_k \xi^{(n+N)k} = \sum_{k=1}^{N} a_k \xi^{nk} = a'_n$$

であり、確かに $\{a'_n\} \in V$ となっている。線形写像であることも容易に確かめられる。

(4) 問題の線形写像を (2) で与えた基底 $\{\delta_{1,n}\}, \ldots, \{\delta_{N,n}\}$ によって表現した行列は

$$A = (\xi^{ij})_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \cdots & \xi^N \\ \xi^2 & \xi^4 & \cdots & \xi^{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi^N & \xi^{2N} & \cdots & \xi^{N^2} \end{pmatrix}$$

で与えられる。問題 6 より、この行列の階数を計算すればよい。これは Vandermonde 行列だから、行列式は差積

$$\det \mathcal{F} = \prod_{i<j} (\xi^j - \xi^i) \neq 0$$

で与えられる。よって階数は N である。

※$\mathcal{F}$ の逆変換は $\mathcal{F}^{-1}(a_n) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k \xi^{-nk}$ で与えられることが比較的簡単に分かる。

$\mathrm{Tr}\,\mathcal{F}$ は Gauss(1805) によって初めて求められた。その値は

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\,\mathrm{Tr}\,\mathcal{F} = \begin{cases} 1+i & (\text{if} \quad N = 0 \mod 4) \\ 1 & (\text{if} \quad N = 1 \mod 4) \\ 0 & (\text{if} \quad N = 2 \mod 4) \\ i & (\text{if} \quad N = 3 \mod 4) \end{cases}$$

となる。$\det \mathcal{F}$ はもっと簡単に書けるだろうか？ 自分で色々計算してみると面白いと思う。