作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

抽象ベクトル空間

実施日：May 8, 2018

ベクトル空間と基底

抽象的なベクトル空間、線形写像の定義については演習 II で扱った。今日はその復習をする。

例題 1. 集合

$$V := \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0 \right\}$$

が (自然なやり方で) ベクトル空間になることを示し、基底を 1 組挙げよ。

【解答】 $\mathbb{R}^3$ は成分ごとの定数倍と和に関してベクトル空間になっている。V がこれの部分ベクトル空間であることを示そう。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ とすると

$$\begin{aligned} 3(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) - 7(x_3 + y_3) &= (3x_1 + 2x_2 - 7x_3) + (3y_1 + 2y_2 - 7y_3) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

だから $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$. 定数倍についても同様である。

ベクトル

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

が V の基底を与えることを示そう。2 つとも確かに V の元である。仮にある実数 $a, b \in \mathbb{R}$ について

$$a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$$

が成り立つとする。これは数ベクトルとしての等号 (右辺は数ではなくベクトル！) であることに注意せよ。両辺を成分ごとに比べると $2a = 0, -3a + 7b = 0, 2b = 0$ だから $a = b = 0$. よって $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ は一次独立である。

次に、勝手な $\boldsymbol{x} \in V$ に対してある $a, b \in \mathbb{R}$ が存在して $x = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}$ と書けることを示そう。示すべき等式の両辺を成分ごとに書けば $x_1 = 2a, x_2 = -3a + 7b, x_3 = 2b$ となり、与えられた実数 x_1, x_2, x_3 で $3x_1 + 2_x - 7x_3 = 0$ を満たすものに対してこの方程式は必ず解くことができる。すなわち、$a = \frac{x_1}{2}, b = \frac{x_3}{2}$ がただ一つの解を与える。

問題 1. (発表課題) 以下の集合が (自然なやり方で) ベクトル空間になることを示し、基底を 1 組挙げよ。

(1) $V := \left\{ \{a_n\} : \{a_n\} \text{ は実数列で、} a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \text{ を満たす} \right\}$

(2) $W := \left\{ f(x) : f(x) \text{ は実数を係数にもつ高々 2 次の多項式で、} f(\sqrt{2}) = 0 \text{ を満たす} \right\}$

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

　これまでは、ベクトル空間といえば、加法および実数による定数倍ができる集合を考えていた。これはうるさくいうと $\mathbb{R}$ ベクトル空間というものである。ベクトル空間の定義において複素数による定数倍を許したものを $\mathbb{C}$ ベクトル空間と呼ぶ。$\mathbb{C}$ ベクトル空間におけるベクトル $v_1, \ldots, v_n$ の一次独立性は、勝手な**複素数** $c_1, \ldots c_n$ について

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = \cdots = c_n = 0$$

が成り立つことと定義される。基底についても同様である。

問題 2.

(1) 複素数の全体は $\mathbb{C}$ ベクトル空間とみなしたとき 1 次元、$\mathbb{R}$ ベクトル空間とみなしたとき 2 次元であることを示せ。

(2) 虚数単位を i とし、$\xi := \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$ とおく。$\mathbb{C}$ の部分集合

$$V := \left\{ a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \;\middle|\; a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

は 2 次元の $\mathbb{R}$ ベクトル空間であり、基底として $1, \xi$ が取れることを示せ。一方、$\mathbb{C}$ の部分集合

$$W := \left\{ a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \;\middle|\; a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q} \right\}$$

は 4 次元の $\mathbb{Q}$ ベクトル空間であり、基底として $1, \xi, \xi^2, \xi^3$ が取れることを示せ。
※ W は $\mathbb{R}$ ベクトル空間にはなっていない。

線形写像と表現行列

例題 2. V を、高々 2 次の複素数係数多項式

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$$

全体が成す $\mathbb{C}$ ベクトル空間とする。写像 $D\colon V \to V$ を

$$D(f) := \frac{df}{dz}$$

と定める。 これが線形写像であることを示せ。さらに、基底 $1, z, z^2$ に関する f の表現行列を求めよ。

【解答】 $f, g \in V$ とすると

$$D(f+g) = \frac{d}{dz}(f+g) = \frac{df}{dz} + \frac{dg}{dz} = D(f) + D(g).$$

定数倍についても同様である。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

$D(1)=0, D(z)=1, D(z^2)=2z$ だから

$$D(1,z,z^2)=(1,z,z^2)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

となる。複素変数による微分 $\frac{d}{dz}$ がよく分からなければ、多項式については $D(1):=0, D(z):=1, D(z^2):=2z$ かつ線形性を満たすように定義しているのだと考えてもよい。

問題 3. (発表課題) V を、高々2次の実係数多項式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

全体が成す $\mathbb{R}$ ベクトル空間、W を高々3次の実係数多項式全体が成す $\mathbb{R}$ ベクトル空間とする。写像 $T\colon V\to W$ を

$$(Tf)(x):=\int_0^x f(t)dt$$

と定める。これが線形写像であることを示せ。さらに、基底 $1,x,x^2\in V$ と $1,x,x^2,x^3\in W$ に関する T の表現行列を求めよ。

問題 4.

(1) $\mathbb{R}^3$ の点を、原点を通る直線 ℓ に関して角度 θ だけ回転させる変換 f を考える。空間ベクトルの定数倍および加法の幾何学的意味に注目して、f が線形写像であることを示せ。

(2) x,y,z 軸それぞれに関して α,β,γ 回転させる変換を、標準基底を用いて行列表現せよ。

(3) (1) で説明したような任意の回転は (2) で求めた行列の積で表せることを示せ。

核と像

定義 1. 線形写像 $f\colon V\to W$ に対し

$$\operatorname{Ker} f:=\left\{\, v\in V:\ f(v)=0 \,\right\}$$

を f の核 (Kernel),

$$\operatorname{Im} f:=\left\{\, w\in W:\ \exists v\ \ f(v)=w \,\right\}$$

を f の像 (Image) という。$\operatorname{rank} f:=\dim\operatorname{Im} f$ を f の階数 (rank) という。

※前回の記号によると $\operatorname{Im} f=f(V)$ だが、線形写像に対しては $\operatorname{Im} f$ という記号を用いることが多い。 $\dim\operatorname{Ker} f$ には特に名前は付いていないようである。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 5. 線形写像 $f\colon V \to W$ に対し、次が成り立つことを示せ。

(1) $\mathrm{Ker}\, f \subset V$, $\mathrm{Im}\, f \subset W$ は部分ベクトル空間

(2) f が単射 $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, f = \{0\}$

(3) f が全射 $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f = W$

問題 6. 線形写像 $f : V \to W$ の、基底 $v_1, \dots v_n \in V, w_1, \dots w_m \in W$ に関する表現行列 A_f を考える。f の階数が行列 A_f の階数に等しいことを示せ。

定理 1. (**次元定理**) 勝手な線形写像 $f\colon V \to W$ に対して

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{rank}\, f$$

が成り立つ。

要は、潰れた分と移した分とを足せば元の分に等しいということ。

問題 7. (必修問題) 例題 2 の線形写像 D について $\dim V, \dim \mathrm{Ker}\, f, \mathrm{rank}\, f$ を計算し、次元定理が成り立っていることを確かめよ。

問題 8. (必修問題) [離散 Fourier 変換] 以下の問題を解け。よく分からなければ $N = 3$ で実験してみよ。

(1) 自然数 N を固定する。複素数から成る数列 a_n で周期 N を持つ、すなわち $a_{n+N} = a_n$ を満たすもの全体を V とする。V は自然なやり方で $\mathbb{C}$ ベクトル空間になることを示せ。

(2) V の次元を求めよ。

(3) ξ を N 乗して初めて 1 になる複素数とする。$\{a_n\} \in V$ に対し

$$a'_n := \sum_{k=1}^{N} a_k \xi^{nk}$$

とおくと $a'_n \in V$ であり、$\mathcal{F}(\{a_n\}) := \{a'_n\}$ とおけば、線形写像 $\mathcal{F}\colon V \to V$ が定まることを示せ。

(4) $\mathcal{F}$ の階数を求めよ。