作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

集合と写像：解答

解答例を読むだけではなく、もう一度、何も見ずに自力で解答が作成できるかどうか手を動かして確かめてください。

問題 1.

(1) $\left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ z^7 = 1 \right\}$

(2) $\left\{ f \in \mathcal{C} \ : \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ f(x+2\pi) = f(x) \right\}$

問題 2.

(1) 成り立つ。なぜなら、$x \in A \cap C$ とすると、仮定より $x \in B$. よって $x \in B \cap C$ となるからである。

(2) 成り立たない。一般には $b \in B$ で A にも C にも属さない元がある。より具体的には、$A = C = \emptyset, B = \{1\}$ とすればよい。

(3) 成り立つ (Venn 図を用いて確かめよ)。実際、集合演算の法則、特に De Morgan の法則を用いれば

$$\begin{aligned}(A \setminus C) \cup B &= (A \cap C^c) \cup B \\ &= (A \cap (A \cap C)^c) \cup B = (A \cup B) \cap ((A \cap C)^c \cup B) \\ &= (A \cup B) \cap ((A \cap C) \cap B^c)^c = (A \cup B) \setminus ((A \cap C) \cup B^c) \\ &= (A \cup B) \setminus ((A \cap C) \setminus B)\end{aligned}$$

となる。2 段目に移るところで敢えて C を $A \cap C$ に置き換えているわけだが、これはやはり De Morgan の法則から

$$\begin{aligned}A \cap (A \cap C)^c &= A \cap (A^c \cup C^c) \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap C^c) = \emptyset \cup (A \cap C^c) = A \cap C^c\end{aligned}$$

となることを用いている。

集合演算の法則も結局は元を取って説明されるのだから、例題の解法のうち最初 2 つのような解法が基本であると言えるが、ただ、常にそんなことをやっていてはあまりに冗長になってしまうのも確かである。

問題 3. (1) $(0, 1]$　(2) $\{0\}$　(3) $\emptyset$

問題 4. どちらも同様なので、(1) だけ解法を示す。$x \in \bigcup_n (A_n \cup B_n)$ とすると、いずれかの n に対して $x \in A_n \cup B_n$ が成り立つ。従って $x \in \bigcup_n A_n$ または $x \in \bigcup_n B_n$ となる。逆にこのとき、$x \in \bigcup_n A_n$ ならば、ある n に対して $x \in A_n$ だから $x \in (A_n \cup B_n)$ が成り立つ。$x \in \bigcup_n B_n$ でも同様に、ある n に対して $x \in (A_n \cup B_n)$ が成り立つ。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 5.

(1) 成り立つ。実際、$\forall a \in A$ に対し、$a \in B$ となるから $f(a) \in f(B)$ である。これは $f(A) \subset f(B)$ を意味する。

(2) 成り立たない。$X = Y = A = \{1, 2\}, B = \{1\}$, f は $f(1) = f(2) = 1$ によって定まっているものを考えよ。

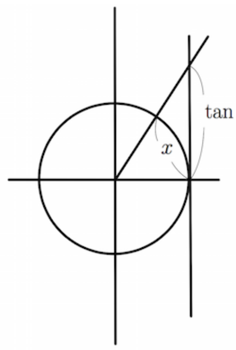
(3) 成り立つ。$a \in A$ とすると $f(a) \in f(A)$ なので $a \in f^{-1}(f(A))$ となるからである。

(4) 成り立たない。$X = Y = \{1, 2\}, A = \{1\}$, f は $f(1) = f(2) = 1$ によって定まっているものを考えよ。

問題 6.

(1) $x = -1$ に対し $x^2 = -1$ を満たす実数 x は存在しないので、f は全射でない。一方、$a \neq 0$ に対し $x = \sqrt{a}, y = -\sqrt{a}$ とすると、$x \neq y$ だが $f(x) = f(y)$ となるので単射ではない。

(2) f が全単射であることを示す。図の様に、単位円周上の点 $(1, 0)$ を通り y 軸に平行な直線をとる。原点を通り角度 x の直線 ℓ を考えると、2 直線の交点は $(1, \tan x)$ で与えられる。
全射性: $a \in \mathbb{R}$ を任意の実数とすると, 図より $a = \tan x$ となる x が存在することが分かる。よって f は全射である。
単射性: 図より、$\tan x = \tan x'$ ならば $x = x'$ となることが分かる。よって f は単射である。



問題 7.

(1) X を有限集合、$f : X \to X$ を単射とする。単射なので X の位数は $f(X)$ のそれに等しい。一方、仮に f が全射でないとすると、$f(X)$ の位数は X の位数より真に小さくなる。ということは X の位数がそれ自身よりも真に小さいことになってしまう。これは矛盾である。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(2) 全射なので $f(X)$ の位数は X のそれに等しい。一方、仮に f が単射でないとすると、X の位数は $f(X)$ の位数より真に大きくなる。ということは X の位数がそれ自身よりも真に大きいことになってしまう。これは矛盾である。

((1) の解答をひっくり返した文章になっている点に注意せよ。これは単射性と全射性の間に鏡のような関係があることを示している。問題 8 も参考のこと。)

(3) 全単射とはこの場合 $1, 2, \ldots n$ の置換に他ならない。従ってその個数は $n!$ である。

問題 8.

(1) $y \in Y$ を任意に取る。$g \circ f$ が全射なので、$(g \circ f)(x) = g(y)$ となる $x \in X$ が存在する。g が単射なら $g(f(x)) = g(y)$ は $f(x) = y$ を導く。つまり f は全射である。

(2) $g(y) = g(y')$ となる $y, y' \in Y$ を任意に取る。f が全射だから $f(x) = y, f(x') = y'$ となる $x, x' \in X$ が存在する。$g(y) = g(y')$ より $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ だが、$g \circ f$ が単射と仮定しているので $x = x'$ でなければならず、従って $y = f(x) = f(x') = y'$. つまり g は単射である。

問題 9.

(1) ⇒ (2)　$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ は一般の写像に対して成り立つ (各自証明を与えよ)。一方 $y \in f(A) \cap f(B)$ とすると、$f(a) = f(b) = x$ となる $a \in A, b \in B$ が取れる。ここで f が単射ならば、$a = b$ が従う。すると $a \in A \cap B$, $f(a) = y$ だから $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ が成り立つ。

(2) ⇒ (1)　$f(x) = f(x')$ となる $x, x' \in X$ を任意に取る。$A = \{x\}, B = \{x'\}$ に仮定を適用すれば $f(A \cap B) = \{f(x)\} = \{f(x')\}$ だから、$A \cap B$ は空ではあり得ない。よって $x = x'$ が必要。

(1) ⇒ (3)　$A \subset f^{-1}(f(A))$ は一般の写像に対して成り立つ (問題 5)。$x \in f^{-1}(f(A))$ とすると、$f(x) \in f(A)$ だから、$\exists a \in A \ \ f(x) = f(a)$ となる。ここで f が単射ならば、$x = a$ が従う。すると $x \in A$ だから $f^{-1}(f(A)) \subset A$ が成り立つ。

(3) ⇒ (1)　$f(x) = f(x')$ となる $x, x' \in X$ を任意に取る。$A = \{x\}$ に仮定を適用すれば $x' \in f^{-1}(f(A)) \subset A = \{x\}$ だから、$x = x'$ でなければならない。

問題 10.

(1) 自然数 n を $n+1$ に送る写像を $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$ とすれば、これが求めるものである。

(2) 写像 $f \colon [1, \infty) \to (1, \infty)$ を、$x \in [1, \infty)$ に対して

$$f(x) := \begin{cases} x+1 & x \in \mathbb{N} \text{ の場合} \\ x & \text{それ以外の場合} \end{cases}$$

と定めればよい。