作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

集合と写像

実施日：May 1, 2018

集合の書き方

例題 1. 0 以上 π 未満の実数全体が成す集合を S とする。内包的記法を用いて S を表せ。

【解答】 求める集合は

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x < \pi \right\}$$

と表せる。

問題 1. 次の集合を内包的記法で表せ。

(1) 7 乗して 1 になる複素数全体が成す集合

(2) 実数直線上定義された連続関数の集合を $\mathcal{C}$ とするとき、$\mathcal{C}$ の要素で周期 2π を持つものの全体

集合演算

例題 2. 任意の集合 A, B に対して $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ が成り立つことを証明せよ。

【解答】

- 【解答例 1】2 つの集合が等しいことを言うには、互いに包含関係があることを示せばよい。$x \in (A \cup B) \setminus C$ とすると、$x \in A$ または $x \in B$ であって、しかも $x \notin C$ が成り立つ。よって $x \in A$ かつ $x \notin C$ であるか、あるいは $x \in B$ かつ $x \notin C$ が成り立つ。つまり
$$(A \cup B) \setminus C \subset (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$
逆に $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ とすると、$x \in A$ かつ $x \notin C$ であるか、あるいは $x \in B$ かつ $x \notin C$ が成り立つ。するといずれにせよ $x \notin C$ であって、$x \in A$ または $x \in B$ が成り立つ。つまり
$$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subset (A \cup B) \setminus C$$
である。

- 【解答例 2】2 つの集合が等しいことを言うには、それぞれの要素が 1 つずつ完全に一致していることを示せばよい。
$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \setminus C &\Leftrightarrow x \in A \text{ または } B,\ \text{かつ } x \neq C \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ かつ } x \neq C,\ \text{または } x \in B \text{ かつ } x \neq C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \end{aligned}$$
だから $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

- 【**解答例 3**】集合演算の法則を認めて使う。補集合の記号に注意せよ。

$$(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap C^c = (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c) = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

問題 2. (必修問題) A, B, C を集合とする。このとき次は成り立つか。成り立つなら証明を、成り立たないのならば反例を与えよ。

(1) $A \subset B \;\Rightarrow\; A \cap C \subset B \cap C$

(2) $A \subset B \;\Rightarrow\; B \setminus A \subset C \setminus A$

(3) $(A \setminus C) \cup B = (A \cup B) \setminus ((A \cap C) \setminus B)$

問題 3. 次の集合を簡単な形に書き直せ。

(1) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}, 1\right]$

(2) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{n}\right)$

(3) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[n, \infty\right)$

問題 4. A_n, B_n を自然数 $n = 1, 2, \dots$ によって添え字付けられた集合とする。次の等式を証明せよ。

(1) $\bigcup_n (A_n \cup B_n) = \left(\bigcup_n A_n\right) \cup \left(\bigcup_n B_n\right)$

(2) $\bigcup_n (A_n \setminus B_n) \subset \left(\bigcup_n A_n\right) \setminus \left(\bigcap_n B_n\right)$

像と逆像

写像 $f\colon X \to Y$, 部分集合 $A \subset X$ に対し、

$$f(A) := \left\{ y \in Y : \text{ある } x \in X \text{ が存在して } f(x) = y \right\}$$

によって定まる Y の部分集合を、f による A の像という。
部分集合 $B \subset Y$ に対し、

$$f^{-1}(B) := \left\{ x \in X : f(x) \in B \right\}$$

によって定まる X の部分集合を、f による B の逆像という。

作成者：久本 智之 研究室：A343 E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 5. (発表課題) 勝手な写像 $f\colon X \to Y$ に対し次は成り立つか。成り立つのならば証明を、成り立たないのであれば反例を与えよ。

(1) $\forall A, B \subset X$ に対し、$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

(2) $\forall A, B \subset X$ に対し、$f(A) \subset f(B) \Rightarrow A \subset B$

(3) $\forall A \subset X$ に対し $A \subset f^{-1}(f(A))$

(4) $\forall A \subset X$ に対し $A = f^{-1}(f(A))$

単射と全射

写像 $f\colon X \to Y$ が単射であるとは、勝手な $x, x' \in X$ に対して

$$f(x) = f(x') \;\Rightarrow\; x = x'$$

が成り立つときをいう。
一方、勝手な $y \in Y$ に対して

$$\text{ある } x \in X \text{ が存在して } f(x) = y$$

となるとき、f は全射であるという。全射かつ単射な写像を全単射と呼ぶ。

問題 6. (発表課題) 次の写像が単射かどうか判断せよ。次に、同じ写像が全射かどうか判断せよ。

(1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

(2) $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, f(x) = \tan x$

問題 7.

(1) 有限集合から自分自身への単射は全射でもあることを証明せよ。

(2) 有限集合から自分自身への全射は単射でもあることを証明せよ。

(3) 有限集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ から自分自身への全単射はいくつ存在するか？

問題 8. 2 つの写像 $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ を考える。

(1) 写像の合成 $g \circ f$ が全射で g が単射ならば f は全射であることを示せ。

(2) 写像の合成 $g \circ f$ が単射で f が全射ならば g は単射であることを示せ。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 9. (必修問題) 写像 $f\colon X \to Y$ について、次の 3 つの条件は同値であることを示せ。

(1) f は単射

(2) 任意の部分集合 $A, B \subset X$ について $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(3) 部分集合 $A \subset X$ について $f^{-1}(f(A)) = A$

問題 10. (必修問題)

(1) 自然数の集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ から $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ への全単射を具体的に 1 つ与えよ。

(2) 区間 $[1, \infty)$ から $(1, \infty)$ への全単射を具体的に 1 つ与えよ。