作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

数列の収束：解答

解答例を読むだけではなく、もう一度、何も見ずに自力で解答が作成できるかどうか手を動かして確かめてください。

問題 1. 勝手な $\varepsilon > 0$ を固定する。これに対し N を $1/\varepsilon^2$ 以上の自然数として選ぶ。一般に自然数 n について $\log n \leqslant \sqrt{n}$ が成り立つから、$n \geqslant N$ ならば

$$\left|\frac{\log n}{n} - 0\right| = \frac{\log n}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}} \leqslant \varepsilon$$

が成り立つ。よって $\dfrac{\log n}{n} \to 0$ となる。

問題 2.

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し、N を a/ε 以上の自然数として選べば、$n \geqslant N$ のとき

$$\left|a\left(\frac{1}{2}\right)^n - 0\right| \leqslant a\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{a}{n} \leqslant \varepsilon$$

が成り立つ。よって $a\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \to 0$ となる。

(2) 勝手な $\varepsilon > 0$ を取り、固定する。n をどのくらい大きくとればよいだろうか。とりあえず自然数 b を取って、$n!$ を下から評価してみると

$$n! = n(n-1)\cdots(b+1)\cdot b! \geqslant b^{n-b}\cdot b!$$

なので、

$$\left|\frac{a^n}{n!} - 0\right| = \frac{a^n}{n!} \leqslant \left(\frac{a}{b}\right)^n b^b$$

が成り立つ。そこで b を「$2a$ より大きい最小の自然数」となるように選べば、

$$\left|\frac{a^n}{n!} - 0\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (2a+1)^{2a+1}$$

となる。よって、$N \geqslant \frac{(2a+1)^{2a+1}}{\varepsilon}$ とすれば、$n \geqslant N$ のとき

$$\left|\frac{a^n}{n!} - 0\right| \leqslant \varepsilon$$

という評価が得られる。

(3) a_n がある実数 α に収束するとして矛盾を導く。まず $\alpha \neq 1$ の場合を考える。$\varepsilon < |1-\alpha|$ となる $\varepsilon > 0$ を取ると、背理法の仮定によりある N が存在して $\forall n \geqslant N\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ。すると n として N より大きい偶数を取れば $\varepsilon < |1-\alpha| = |a_n - \alpha| < \varepsilon$ となり、矛盾をきたす。では $\alpha = 1$ としたらどうだろうか。2 より小さい $\varepsilon > 0$ を取ると、背理法の仮定によりある N が存在して $\forall n \geqslant N\ |a_n - 1| < \varepsilon$ が成り立つ。今度は n として N より大きい奇数を取れば $2 = |-1-1| = |a_n - 1| < \varepsilon$ となり、矛盾をきたす。

問題 3. $c \neq 0$ としてよい。勝手な $\varepsilon > 0$ を取り、固定する。仮定により、ある N が存在して

$$n \geqslant N \Rightarrow |a_n - \alpha| \leqslant \frac{\varepsilon}{|c|}$$

が成り立つ。ここで N は ε に対して取ったのではなく、$\frac{\varepsilon}{|c|}$ に対して取ったことに注意せよ。すると $n \geqslant N$ のとき

$$|ca_n - c\alpha| \leqslant |c| \cdot |a_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$$

となるから、$ca_n \to c\alpha$ が成り立つ。

問題 4. 勝手な $\varepsilon > 0$ を取り、固定する。仮定により、ある N が存在して

$$n \geqslant N \Rightarrow |a_n - \alpha| \leqslant \frac{\varepsilon}{2|\alpha| + 1}$$

が成り立つ。ここで N は ε に対して取ったのではなく、$\frac{\varepsilon}{2|\alpha|+1}$ に対して取ったことに注意せよ。必要なら N をさらに大きく取って、

$$|a_n - \alpha| \leqslant 1$$

としてよい。すると $n \geqslant N$ のとき

$$\left|a_n^2 - \alpha^2\right| \leqslant |a_n + \alpha| \cdot |a_n - \alpha| \leqslant (2|\alpha| + 1) \cdot \frac{\varepsilon}{2|\alpha| + 1} \leqslant \varepsilon$$

となるから、$ca_n \to c\alpha$ が成り立つ。

問題 5. 勝手な $\varepsilon > 0$ を取り、固定する。仮定により、ある N が存在して

$$n \geqslant N \text{ ならば } |a_n - \alpha| \leqslant \varepsilon, |b_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$$

となる。すると $n \geqslant N$ のとき

$$c_n - \alpha \leqslant b_n - \alpha \leqslant \varepsilon, \quad \alpha - c_n \leqslant \alpha - a_n \leqslant \varepsilon$$

となるから、$|c_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ。

問題 6. 勝手な $\varepsilon > 0$ を取り、固定する。仮定により、ある N が存在して

$$n \geqslant N \text{ ならば } |a_n - \alpha| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

となる。すると $n, m \geqslant N$ のとき

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |(a_n - \alpha) - (a_m - \alpha)| \\ &\leqslant |a_n - \alpha| + |a_m - \alpha| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

となるから、$|a_n - a_m| < \varepsilon$ が成り立つ。

問題 7.

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(1) $(n+2)$ ヶ月目に新たに生まれるウサギの数は a_n に等しい。したがって漸化式

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

が成り立つ。

(2) $r_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ とおくと、上の漸化式より

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} \\ &= 1 + \frac{1}{r_n} \end{aligned}$$

が成り立つ。仮に極限 ρ が存在するならば

$$\rho = 1 + \frac{1}{\rho} \Leftrightarrow \rho = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

となるはずで、さらにウサギの数を考えている以上、ρ は負ではあり得ない。初期値 a_1, a_2 に依らず $r_n \to \rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となることを示そう。2 つの式の差を取れば

$$|r_{n+1} - \rho| = \left| \frac{1}{r_n} - \frac{1}{\rho} \right| \leqslant \frac{|r_n - \rho|}{|\rho r_n|}$$

となる。$r_n \geqslant 1$ だから

$$\begin{aligned} |r_{n+1} - \rho| &\leqslant \rho^{-1} |r_n - \rho| \\ &\leqslant \rho^{-n+1} |r_1 - \rho| . \end{aligned}$$

以上より、勝手な $\varepsilon > 0$ を固定したとき、$N \geqslant 4\varepsilon^{-1} |r_1 - \rho|$ とさえすれば、$n \geqslant N$ について

$$|r_n - \rho| \leqslant \rho^{-n+2} |r_1 - \rho| \leqslant \frac{4 |r_1 - \rho|}{N} \leqslant \varepsilon$$

が成り立つ。つまり $r_n \to \rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となることが分かった。これは、ウサギの増え方が公比 ρ の幾何数列に漸近的に近づくことを意味する。

問題 8. $\varepsilon - N$ 論法のような厳密な議論を必要とする、有名な問題である。

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \alpha = \frac{(a_1 - \alpha) + \cdots + (a_n - \alpha)}{n} \to 0$$

などと片付けるのは典型的な誤り。

とりあえず自然数 k を取って、評価したいものを

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \alpha = \frac{a_1 + \cdots + a_{k-1}}{n} + \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{(a_k - \alpha) + \cdots + (a_n - \alpha)}{n-k+1}$$

と分解する。k が十分大きければ右辺第 2 項の $a_k - \alpha, \ldots, a_n - \alpha$ はいくらでも小さくできる。さらにこの k に対し n が十分大きければ、第 1 項はいくらでも小さくできる。

そこで、勝手な $\varepsilon > 0$ を固定し、まず k を

$$n \geqslant k \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つように取る。さらに、この ε, k に対して、$N \geqslant k$ を

$$n \geqslant N \text{ ならば } \left| \frac{a_1 + \cdots + a_{k-1}}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるように取る。これは $N := \varepsilon^{-1}(a_1 + \cdots + a_{k-1})$ とすれば十分である。そうすれば $n \geqslant N$ について

$$\begin{aligned}\left| \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \alpha \right| &\leqslant \left| \frac{a_1 + \cdots + a_{k-1}}{n} \right| + \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{|a_k - \alpha| + \cdots + |a_n - \alpha|}{n-k+1} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{\varepsilon/2 + \cdots + \varepsilon/2}{n-k+1} \leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ。これが示したいことであった。

一般に、第 n 項までの算術平均を取ることで数列がまさに「均されて」収束がよくなると期待できる。例えば $a_n = (-1)^n$ ならば

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{-1 + (-1)^n}{2n}$$

となって、振動していたものが収束する。興味のある人は、例えば Fejér の定理について調べてみよ。

問題 9. 例えば、

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n}, \ a_1 = 2$$

という数列を考えると、$a_n \to \sqrt{2}$ が成り立つ。これは Newton 法と呼ばれる構成である。すなわち、放物線 $y^2 = x^2 - 2$ の、点 $a_n > \sqrt{2}$ における接線と x 軸との交点を a_{n+1} としたものである。上の漸化式から

$$a_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2}(a_n - \sqrt{2})$$

が成り立つことに注意すれば、収束を示すのは容易である。