作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

数列の収束

実施日：April 24, 2018

収束の厳密な定義

定義 1. 数列 a_n が実数 α に収束するとは、勝手な $\varepsilon > 0$ に対しある自然数 N が存在して

$$n \geqslant N \text{ となる任意の } n \text{ について } |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つことである。

例題 1. 数列 $a_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ は $n \to \infty$ としたとき 0 に収束することを示せ。

【解答】 勝手な $\varepsilon > 0$ を取る。これに対し、N を $1/\varepsilon^2$ 以上の自然数として選ぶ (そのような自然数は確かに存在する)。すると、$n \geqslant N$ ならば

$$|a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}} \leqslant \varepsilon$$

が成り立つ。

補足 1. 具体的な $\varepsilon > 0$ に対してどのような N を選べばよいか考えると分かりやすいかもしれない。上の状況なら、

$\varepsilon = 0.1$ ならば $N = 100$,

$\varepsilon = 0.01$ ならば $N = 10000$,

$\varepsilon = 0.001$ ならば $N = 1000000$

という具合である。記号 ε は "error=誤差" の頭文字である。

> 「ほう a_n が α に近づくという、ならばどのくらい進めば $\varepsilon = 0.1$ より近づくのですか？」「$N = 100$ くらい進めばその先は大丈夫です」「なら $\varepsilon = 0.01$ より近づくのは?」「$N = 10000$ くらい進めばその先はずっと大丈夫です」...

というやり取りを延々としているのである。$\varepsilon = 0.1$ に対し $N = 100$ きっかりでなくても、$N = 101$ でもよいし $N = 1000$ としてもよい。$n \geqslant N$ となる n を「ε に対して十分大きい n」と表現する。

問題 1. (発表課題) 数列 $a_n := \dfrac{\log n}{n}$ は 0 に収束することを示せ。

問題 2. (必修問題)

(1) 正の実数 a に対し、数列 $a_n := a\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ は 0 に収束することを示せ。

(2) 正の実数 a に対し、数列 $a_n := \dfrac{a^n}{n!}$ は 0 に収束することを示せ。

(3) 数列 $a_n := (-1)^n$ は $n \to \infty$ としたときどんな実数にも収束しないことを示せ。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

収束列の性質

例題 2. $a_n \to \alpha, b_n \to \beta$ のとき、$a_n + b_n \to \alpha + \beta$ となることを示せ。

【解答】 勝手な $\varepsilon > 0$ を取り、これに対し十分大きい n で $|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon$ が成り立つことを示す。仮定より $a_n \to \alpha$ だから、同じ $\varepsilon > 0$ に対し、ある自然数 N_1 が存在して

$$n \geqslant N_1 \text{ となる } n \text{ について } |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ。同様に、ある自然数 N_2 が存在して

$$n \geqslant N_2 \text{ となる } n \text{ について } |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ。$\varepsilon > 0$ は最初に固定したもので共通だが、N_1 と N_2 は数列によって異なることに注意せよ。さて、$N := \max\{N_1, N_2\}$ とすれば、$n \geqslant N$ となる n について

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| &\leqslant |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ。これが示したいことであった。

補足 2. 三角不等式を用いた後で a_n に関する誤差 $|a_n - \alpha|$ と b_n に関する誤差 $|b_n - \beta|$ を足すので、それらをあらかじめ ε より小さめに見積もっておく。$\frac{\varepsilon}{2}$ といわず、もっときつく $\frac{\varepsilon}{100}$ くらいまで押さえておいてもよい。

問題 3. (発表課題) $a_n \to \alpha$ のとき、勝手な定数 c に対して $ca_n \to c\alpha$ が成り立つことを示せ。

問題 4. (必修問題) $a_n \to \alpha$ のとき、$a_n^2 \to \alpha^2$ となることを示せ。

問題 5. 数列 a_n と b_n は $a_n \leqslant b_n$ を満たし、共通の実数 α に収束しているとする。このとき、$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ を満たす数列 c_n はやはり α に収束することを示せ。

問題 6. 勝手な $\varepsilon > 0$ に対し、ある N が存在して

$$n, m \geqslant N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

が成り立つとき、 数列 a_n は Cauchy 列であるという。収束する数列 a_n は常に Cauchy 列であることを示せ。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

色々な数列

問題 7. ウサギは繁殖力が非常に強い害獣として知られる。簡単のため、ウサギは死なないとし、1つがいのウサギは産まれて2ヶ月後から毎月1つがいずつのウサギを産むとする。このとき、nヶ月後のつがいの数を a_n としよう。

(1) a_n の満たす漸化式を求めよ。

(2) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ がある実数に収束することを示せ。この値にはどんな意味があるか？

問題 8. 数列 a_n が実数 α に収束する、すなわち $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$$

が成り立つことを示せ。余力があれば、収束列 a_n を算術平均列 $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ に取り替えるメリットについて考察せよ。

問題 9. (必修問題) 有理数からなる数列で $\sqrt{2}$ に収束するものを作れ。(収束が速ければ速いほどよい)