

論理の基礎：解答

解答例を読むだけではなく、もう一度、何も見ずに自力で解答が作成できるかどうか手を動かして確かめてください。

問題 1. 否定命題は「 $xy = 1$ を満たす y が存在しないような実数 x が存在する。」となる。元の命題は偽である。なぜなら $x = 0$ は $xy = 1$ となる y を持たない。

問題 2.

- (1) 否定命題は「 $x^2 \leq 0$ となるような実数 x が存在する。」となる。元の命題は偽である。 $x = 0$ なら $x^2 = 0$ だから。
- (2) 否定命題は「 $x^2 \geq 1$ だが $x < 1$ となる実数 x が存在する。」となる。元の命題は偽である。実際、 $x = -1$ は $x^2 \geq 1$ を満たすが $x \geq 1$ とならない。
- (3) 否定命題は「 $1/3 \leq x \leq 2/3$ となる整数 x が存在する」となる。元の命題は真である。
- (4) 否定命題は「どんな正の有理数よりも小さい正の実数は存在しない。」となる。元の命題は偽である。仮にそのような実数 $x > 0$ が存在したと仮定すると、 $1/n < x$ となる自然数 n が取れるのでおかしい。

問題 3.

- (1) 1 より大きい自然数 p で 1 と p 自身以外に約数を持たないものを素数と呼ぶ。
- (2) 命題 P が真であることを示すために、 P の否定命題 $\neg P$ が真であると仮定して矛盾を導く方法。矛盾とは、ある命題 Q と $\neg Q$ の両方が真になるような状況を指す。 $(P$ と Q は違う命題であってもよい)
- (3) $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ が要件を満たしている。
- (4) 「素数が $n + 1$ 個以上存在する」という事実が、「素数が n 個しかない」という背理法の仮定に矛盾している。

問題 4.

- (1) 2 乗して 2 になる正の実数を $\sqrt{2}$ と表す。2 整数の比 p/q で与えられる数を有理数という。有理数でない実数を無理数という。
- (2) 「 $\sqrt{2}$ は有理数である」というのが背理法の仮定である。すると、 $\sqrt{2} = p/q$ と書ける。 p, q は共通の約数を持たないとしてよい。 $\sqrt{2}$ の定義から、両辺を 2 乗すれば $p^2 = 2q^2$ となる。

- (3) $p^2 = 2q^2$ より p^2 は 2 で割り切れる。ということは、 p は 2 で割り切れる。 $p = 2r$ とおくと $2r^2 = q^2$ だから、同じ議論により今度は q が偶数でなければならない。 p, q は共通の約数を持たないと仮定していたから、これは矛盾である。

問題 5.

- (1) 数学的帰納法では $n = 1$ の場合に命題が真であることを示さねばならない。ところが、「 n 人までの人間は全て AB 型である」という命題は $n = 1$ のとき真ではない。
- (2) この証明は、「面積最大のものが存在するならば、それは正三角形でなければならない」ということしか言っていない。存在を証明するにはどうすればよいか考えてみよ。