作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

論理の基礎

実施日：April 17, 2018

命題の真偽・否定命題

問題 1. (発表課題) 以下の命題の否定命題を書け。また、元の命題の真偽を判定せよ。

「任意の実数 x に対して、$xy = 1$ を満たすような実数 y が存在する。」

問題 2. (必修問題) 以下の命題の否定命題を書け。また、元の命題の真偽を判定せよ。

(1) 任意の実数 x に対して、$x^2 > 0$ である。

(2) 実数 x が $x^2 \geqslant 1$ を満たすならば $x \geqslant 1$ である。

(3) x が整数ならば $x > 2/3$ または $x < 1/3$ を満たす。

(4) どんな正の有理数よりも小さい正の実数が存在する。

背理法による証明

問題 3. (発表課題) 以下の誘導に従い、素数が無限に存在することを背理法によって示せ。

(1) 素数の定義を述べよ。

(2) 背理法とは何か述べよ。

(2) 仮に素数が有限個の $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ に限るとした場合、これらを用いて、p_n よりも大きい素数を作れ。(この p は prime number の頭文字である。)

(3) 結局、何が何に矛盾するのか。

問題 4. (必修問題) 以下の誘導に従い、$\sqrt{2}$ が無理数であることを背理法によって示せ。

(1) $\sqrt{2}$ の定義を述べよ。また、ある数が無理数であることの定義を述べよ。

(2) 背理法の仮定から、共通の約数を持たない整数 p, q が存在して $p^2 = 2q^2$ が成り立つことを示せ。

(3) 証明を完成させよ。(ヒント: まず p が偶数であることを導け)

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

論理の穴

問題 5. 以下の証明の誤りを指摘せよ。

(1) n 人までの人間は全て AB 型であることが示せたとすると、$n+1$ 人のうちどの n 人を選んでも AB 型なのだから、$n+1$ 人は皆 AB 型である。数学的帰納法により全ての人間は AB 型である。

(2) 正三角形は、外接円を同じくする三角形のうち面積が最大のものである。実際、そのような三角形 ABC について仮に $AB \neq AC$ が成り立つとすると、頂点 B, C を固定したまま頂点 A を円周に沿って少しずらすことで、より面積の大きい三角形を得ることができる。