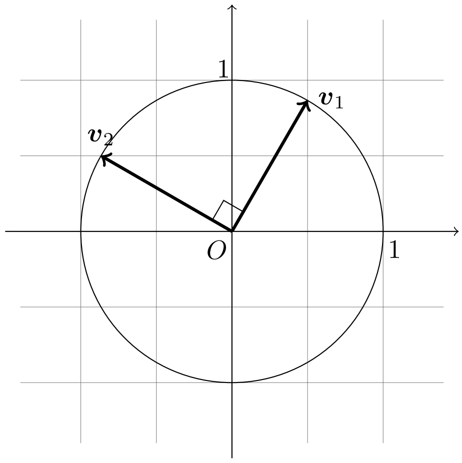
担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

正規直交基底・実対称行列 解説

問題 1.

(1) 内積の定義に従って直接計算すると以下のようになるので, この基底は確かに正規直交基底である. また, 2 つのベクトルを図示すると下図のようになる.

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1\rangle = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$
$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0$$
$$\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1\rangle = \frac{-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$
$$\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2\rangle = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$



(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ として $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$ とする. 必要ならば $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の順番を入れ替えることで $\det P > 0$, すなわち $ad - bc > 0$ であるとしてよい. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は正規直交基底だから, $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$ である. 以上から $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$, $c = -\sin\theta$, $d = \cos\theta$, すなわち

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

と書ける. 第 7 回問題 6 (2) の解答も参照せよ.

問題 2. 内積の定義及び行列の積の定義から $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ が成り立つことに注意せよ. この表示から, 内積はそれぞれの成分について線型写像になっていることが直ちにわかる.

(1) ⇒ (2) $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \dots \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$ としたとき ${}^tP = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{v}_1 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$ なので, ${}^tPP = \left({}^t\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_j\right)_{i,j} = \left(\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\rangle\right)_{i,j}$ である. 今, 仮定より $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\rangle = \delta_{ij}$ (δ_{ij} は Kronecker のデルタ) なので, ${}^tPP = E$ が成り立つ.

(2) ⇒ (3) ${}^tPP = E$ より $\langle P\boldsymbol{x}, P\boldsymbol{y}\rangle = {}^t(P\boldsymbol{x})P\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}{}^tPP\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$.

(3) ⇒ (1) $P\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{v}_i$ だから, 仮定より $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\rangle = \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle = \delta_{ij}$. 一方, これより (2) が従うから, P は正則行列である. したがって, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である.

問題 3. $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n a_i\boldsymbol{v}_i$ として $\boldsymbol{v}_j$ との内積をとれば, 内積の線型性より $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_j\rangle = \sum_{i=1}^n a_i\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\rangle = a_j$ が成り立つ. したがって,

$$\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_1\rangle\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_n\rangle\boldsymbol{v}_n$$

が成り立つ. (すなわち, 正規直交基底を用いれば, 内積を用いてベクトルを分解することができる.)

問題 4.

(1) $\|\boldsymbol{v}_1\| = 5$ より $\tilde{\boldsymbol{v}}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$. 次に, $\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - \langle \boldsymbol{v}_2, \tilde{\boldsymbol{v}}_1\rangle \tilde{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ なので $\|\boldsymbol{v}_2'\| = 5$. したがって, $\tilde{\boldsymbol{v}}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

(2) $\|\boldsymbol{v}_1\| = \sqrt{2}$ より $\tilde{\boldsymbol{v}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$. 次に, $\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - \langle \boldsymbol{v}_2, \tilde{\boldsymbol{v}}_1\rangle \tilde{\boldsymbol{v}}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ なので $\|\boldsymbol{v}_2'\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$. したがって, $\tilde{\boldsymbol{v}}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$. 最後に, $\boldsymbol{v}_3' = \boldsymbol{v}_3 - \langle \boldsymbol{v}_3, \tilde{\boldsymbol{v}}_1\rangle \tilde{\boldsymbol{v}}_1 - \langle \boldsymbol{v}_3, \tilde{\boldsymbol{v}}_2\rangle \tilde{\boldsymbol{v}}_2 = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ とすると $\|\boldsymbol{v}_3'\| = 2\sqrt{3}$. したがって, $\tilde{\boldsymbol{v}}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(3) 問題 3 より, $\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{v}, \tilde{\boldsymbol{v}}_1\rangle \tilde{\boldsymbol{v}}_1 + \langle \boldsymbol{v}, \tilde{\boldsymbol{v}}_2\rangle \tilde{\boldsymbol{v}}_2 + \langle \boldsymbol{v}, \tilde{\boldsymbol{v}}_3\rangle \tilde{\boldsymbol{v}}_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\boldsymbol{v}}_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\tilde{\boldsymbol{v}}_2 + \frac{5}{\sqrt{3}}\tilde{\boldsymbol{v}}_3$.

問題 5. A が対称行列であるとき, 問題 2 の解答の最初に注意したことから $\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = {}^t(A\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}{}^tA\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} = \langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}\rangle$ を得る.

逆に, 勝手なベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し $\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}\rangle$ が成り立つとする. $A\boldsymbol{e}_j$ は A の第 j 列を表しているから, $A = \left(a_{ij}\right)_{ij}$ とすれば $\langle A\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle = a_{ji}$, $\langle \boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_j\rangle = a_{ij}$ である. したがって, 仮定より $a_{ji} = a_{ij}$ を得る. ゆえに, A は対称行列である.

問題 6.

(1) A の固有多項式は $\det(\lambda E - A) = (\lambda+4)(\lambda-6)$ だから, A の固有値は $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 6$. 対応する固有ベクトルとして長さが 1 のものをとると

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

となる. よって, $P = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3 & 1\\-1 & 3\end{pmatrix}$ とすれば P は直交行列で, ${}^tPAP = \begin{pmatrix}-4 & 0\\0 & 6\end{pmatrix}$ と対角化できる.

(2) A の固有多項式は $\det(\lambda E - A) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3)$ だから, A の固有値は $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$. 対応する固有ベクトルとして長さが 1 のものをとると

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

となる．よって，$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ とすれば P は直交行列で，${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ と対角化できる．

(3) A の固有多項式は $\det(\lambda E - A) = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$ だから，A の固有値は $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$.
固有値 λ_1 に対応する固有空間 V_{λ_1} を求めると

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

なので，V_λ の基底として $\boldsymbol{v}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．この基底に Gram-Schmidt の直交化法を適用して V_{λ_1} の正規直交基底

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{v}}_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を得る．一方，固有値 λ_2 に対応する固有ベクトルとして長さが 1 のものをとると $\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ となる．以上より $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ とすれば P は直交行列で，${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ と対角化できる．

問題 7. 定義に従って計算すると各教科の平均点は $\bar{x} = 6$, $\bar{y} = 7$ で，分散共分散行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

となる．この分散共分散行列の固有値は $\frac{1}{4}(9 \pm \sqrt{5})$ であって，対応する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} -1 \pm \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$ が選べる．そこで，$P = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix}$ とすれば P は直交行列で，${}^tPAP = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 9-\sqrt{5} \end{pmatrix}$ と対角化される．

分散共分散行列の固有値は常に 0 以上である．固有値が 1 つしかない (重複している) 場合というのは分散共分散行列が単位行列のスカラー倍と一致している場合に限る．これ

は, 2 種類のデータには相関がなく, かつ分散が等しいということである. このとき, 固有値が大きいほどデータのバラつきは大きい. 例えば $(x_i, y_i) = (2,0), (0,2), (-2,0), (0,-2)$ $(N=4)$ というデータに対する分散共分散行列は, 単位行列と一致する.

固有値が 2 つあるとき, 分散共分散行列の固有値は, データを $\mathbb{R}^2$ にプロットしたときに, 対応する固有ベクトルの方向へどの程度バラついているかを表している. $(x_i, y_i) = (0,0), (10,10)$ $(N=2)$ といった極端な状況を考えてみよ.

問題 8.

(1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ に対しては $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = {}^t\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{y}}$ であって, これは $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の成分が実数の場合には $\mathbb{R}^n$ の内積と一致している. 今, A が実対称行列のとき, 成分はすべて実数なので $A\bar{\boldsymbol{y}} = \overline{A\boldsymbol{y}}$ が成り立つから, 問題 5 の解答を参考にして $\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = {}^t(A\boldsymbol{x})\bar{\boldsymbol{y}} = {}^t\boldsymbol{x}\overline{A\boldsymbol{y}} = \langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y} \rangle$ を得る. なお, 逆向きの証明は問題 5 の証明がそのまま使える.

さて, 実対称行列 A と $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ に対して $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ が成り立つとき, $\langle A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = \lambda\|\boldsymbol{v}\|^2$ である. 一方, 先程示したことから, $\langle A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \lambda\boldsymbol{v} \rangle = \bar{\lambda}\|\boldsymbol{v}\|^2$ が成り立つ. したがって, $\lambda\|\boldsymbol{v}\|^2 = \bar{\lambda}\|\boldsymbol{v}\|^2$ を得る. いま, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ より $\|\boldsymbol{v}\| \neq 0$ だから, 両辺を $\|\boldsymbol{v}\|^2$ で割って $\lambda = \bar{\lambda}$ を得る. したがって, λ は実数である.

(2) 実対称行列 A の相異なる固有値を λ, μ とし (実数であることに注意せよ), 対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ ととる. このとき, $\langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \lambda\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ かつ $\langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v} \rangle = \mu\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ が成り立つ. したがって, $(\lambda - \mu)\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ を得る. λ と μ は相異なるから $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ である. したがって, 実対称行列の相異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交する.