担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

2 変数関数の積分

実施日：January 10, 2018

1/24 の期末試験について (重要)

範囲は**第 12 回目 (1/10)** までとします。特に中間試験以降の内容を重視します。学生証を持参してください。当日は学生番号順に並んだ座席表に沿って座ってください。筆記用具、計時機能のみの時計、以外は持ち込めません。テストにはプリントから類題をいくつか出題します。

逐次積分に直して計算する

今回は、2 変数関数 $f(x,y)$ の領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ における積分

$$\int_D f(x,y)dxdy$$

の計算について学ぶ。

補足 1. 両変数について積分していることを強調して $\iint_D f(x,y)dxdy$ と書くこともあるが、同じものである。積分の意味は状況に応じて様々に変わる。幾何学的には f のグラフが囲む符号付き体積であるが、例えば D が鉄板か何かで、f がその上の温度分布であるならば、上の積分 (を D の面積で割ったもの) は平均温度を求めていることになる。いずれにせよ、領域 D としては主に区分的に滑らかな曲線で囲まれた有界領域を考え、関数 $f(x,y)$ は境界まで連続であるとする。まったくの無条件では良い積分を定義することができない。厳密な取り扱いについては、例えば M. Spivak「多変数の解析学」(齋藤正彦訳, 東京図書) を見よ。

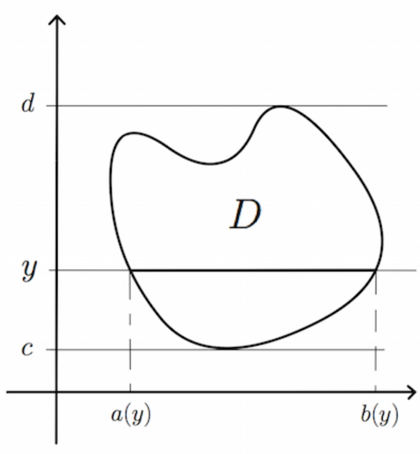
2 変数関数の積分をそのまま計算することは難しい。そこで、まず y を固定し、$(x,y) \in D$ となる $x \in \mathbb{R}$ に沿って 1 変数関数の定積分

$$F(y) := \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$$

を計算する。次に、$F(y)$ を y について積分する。このように逐次的に積分したものを

$$\int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx \right) dy = \int_c^d F(y)dy$$

という風に書く。



定理 1. 上の条件のもとで

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

が成り立つ。

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

例題 1. $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0 \right\}$, $f(x, y) = x$ に対し、積分 $\displaystyle\int_D xdxdy$ を計算せよ。

【解答】 領域 D を y 一定の直線で切ると $0 \le x \le \sqrt{1-y^2}$ と表せるので

$$\int_D xdxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} xdx \right) dy$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{1-y^2}{2} dy = \frac{2}{3}.$$

この計算の意味は、半円板の重心 (の x 座標) である。

問題 1. (提出問題) 次のそれぞれの場合に積分 $\displaystyle\int_D f(x, y)dxdy$ を計算せよ。

(1) D は 3 つの直線 $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ で囲まれた領域、$f(x, y) = x$.

(2) D は直線 $y = 1$ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた領域、$f(x, y) = y^{-\frac{1}{2}} \cos x$.

(3) D は 2 つの放物線 $y = x^2$, $y = 4 - x^2$ で囲まれた領域、$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y}$

問題 2. 次のそれぞれの場合に積分 $\displaystyle\int_D f(x, y)dxdy$ を計算せよ。

(1) D は 3 つの直線 $x = 1$, $x - y = 0$, $x + y = 0$ で囲まれた領域、$f(x, y) = e^{x^2}$.

(2) D は 3 つの直線 $x = \pi$, $y = 0$, $x - y = 0$ で囲まれた領域、$f(x, y) = \frac{y \sin x}{x}$.

問題 3. $\mathbb{R}^2$ 内の、滑らかな曲線に囲まれた有界領域 A, B を考える。勝手な実数 $h \in \mathbb{R}$ に対し高さ h での切り口

$$A_h := \left\{ (x, y) \in A \;\middle|\; y = h \right\}, \quad B_h := \left\{ (x, y) \in B \;\middle|\; y = h \right\}$$

の長さが等しければ、A と B の面積は等しい。定理 1 を用いてこのことを示せ。

問題 4. C^2 級関数 $f(x, y)$ に対し各点 (a, b) で

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$$

が成り立つことを、定理 1 を利用して示せ。(ヒント：仮に $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) > \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$ とすると、(a, b) を含む小さい正方形領域 D で $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} > \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ が成り立つ。)

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

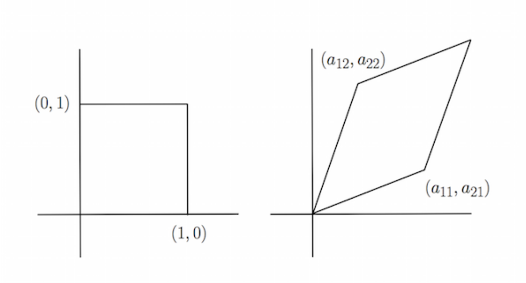
積分の変数変換

基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ が標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ を用いて

$$(\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

と書けているとする。

このとき、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ の張る平行四辺形の面積は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ の張る平行四辺形の面積の $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 倍となる。次の定理は、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の張る平行四辺形を形式的に $dxdy$ で置き換えたものと考えることができる。



定理 2. $x = x(s,t), y = y(s,t)$ が (s,t) についての C^1 級関数で、さらに $f(x,y)$ が (x,y) についての連続関数であるとする。合成関数を $\varphi(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$ と書く。この変数変換によって st 平面の有界な領域 D' が xy 平面の領域 D に 1 対 1 に移るとき、以下が成り立つ.

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_{D'} \varphi(s,t) \left| \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} \right| dsdt.$$

補足 2. D と D' との対応が 1 対 1 でなくても、そのような点集合の面積が 0 ならば上の定理は成り立つ。実際に定理を運用するのはこのような状況が少なくない。

例題 2. $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$ とする。このとき積分

$$\int_D 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}\ dxdy$$

を計算せよ。

【解答】 変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ は r, θ について C^1 級であり、この変換によって領域

$$D' = \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

は D におよそ 1 対 1 に移る。$r=0$ のときは複数の θ について $(r,\theta)\in D'$ が同一の点 $(0,0)\in D$ に移るが、そのような (r,θ) の集合は面積がゼロなので定理 2 が適用できる。従って、

$$\begin{aligned}\int_D 2\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy &= \int_{D'} 2\sqrt{1-r^2}\left|\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\right| drd\theta\\ &= \int_{D'} 2r\sqrt{1-r^2}drd\theta.\end{aligned}$$

さらに逐次積分によって計算すれば

$$\begin{aligned}\int_{D'} 2r\sqrt{1-r^2}drd\theta &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 2r\sqrt{1-r^2}dr\right)d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{2}{3}\,d\theta=\frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$

この計算は単位球

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$$

の体積を求めることに他ならない。

問題 5. (提出問題) 次の積分の値を求めよ．ただし R は正の定数とする。

(1) $\displaystyle\int_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2},\quad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;x^2+y^2\le R^2\right\}.$

(2) $\displaystyle\int_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy,\quad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;x^2+y^2\le R^2\right\}.$

問題 6. 適当な変数変換によって次の積分を簡単にし、その値を求めよ．ただし p,q,r は自然数とする。

(1) $\displaystyle\int_D \sqrt{x^2-y^2}dxdy,\quad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;0\le y\le\min\{x,2-x\}\right\}.$

(2) $\displaystyle\int_D x^{p-1}y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}dxdy,\quad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;x,y\ge 0,x+y\le 1\right\}.$

問題 7. (提出問題) a,b,c を正の定数とする。例題 2 を参考にして、楕円体 (ellipsoid)

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$$

の体積を求めよ。

問題 8. 広義積分 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$ を考える。

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(1) $I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ と書けることを利用して, $I = \sqrt{\pi}$ であることを示せ。

(2) $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ とする。実数直線上の分布:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

は平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布と呼ばれ、確率統計の分野では基本的な関数の 1 つである。

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \mu, \quad \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 p(x)dx = \sigma^2$$

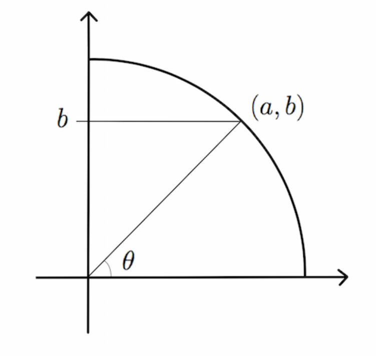
を示せ。

おまけ: 三角関数の定義

高校の教科書では、単位円周上の点 (a, b) について、その成分を弧長 θ の関数として書いたものを $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$ という記号で表す。弧長とは何かということを突き詰めて考えると、これは結局、積分を使って

$$\theta = \int_0^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

と定義されるものである。



ちょっと格好つけた言い方をするなら、$\sin\theta$ は

$$b \mapsto \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

という関数の逆関数として定義される。三角関数をこのように捉えるならば、先に積分を定義しなければならない。例えば、公式

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

なども、少なくとも弧の長さとは何かというところに戻って証明しなければならない。これは存外に面倒くさいことである。積分の計算に下手に三角関数の性質を用いたりすると、循環論法になってしまう。(興味のある人は考えてみてほしい。)

さて積分の厳密な定義をおさらいしよう。一般に、区間 $[a, b]$ 上の関数 $f(x)$ を考える。区間 $[a, b]$ の分割 $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ および各 $1 \leq k \leq n$ に対し間の点 $\xi_k \in [a_{k-1}, a_k]$ を自由に取る。n をどんどん大きく取ることで $|a_k - a_{k-1}|$ を小さくしていったとき、極限

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{|a_k - a_{k-1}| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(a_k - a_{k-1})$$

担当教員： 久本 智之　研究室： A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

が存在して分割の選び方に依らず一定の値になるならば、$f(x)$ は**積分可能**であるという。領域 D 上の 2 変数関数 $f(x,y)$ についても、D を細かく分割していくことで同じように積分

$$\int_D f(x,y)dxdy$$

が定義される。このように厳密に定義された積分に対し定理 1 や定理 2 が成り立つ。

三角関数を積分で定義するのは実は結構面倒だと言ったが、ではもっと簡単に話が進むような定義はないのだろうか。展開式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

に注目してみる。右辺を用いて $\sin x$ を定義できないものか。しかし、Taylor の定理を思い出せば、これは $x \to 0$ としたとき、しかも $\cdots$ を剰余項に置き換えた上で成り立つものである。もし上の式を用いて $\sin x$ を定義したいのであれば、右辺が何らかの意味で x によらず収束していることを示さなければならない。さらに、$\sin' x = \cos x$ などといった公式を証明するためには、関数の無限和 $x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$ と微分の交換ができるか確かめる必要がある。このような厳密な収束の議論は来年度以降の講義や演習で詳しく取り扱う。