担当教員： 久本 智之　研究室： A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

行列の対角化　解答例

問題 1.

(1) A の固有多項式は $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3)$ だから A の固有値は $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. 例えば $\lambda_1 = 2$ に属する固有ベクトルを求めるためには連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y=0 \\ -x+2y=0 \end{cases}$$

を解けばよい. この解は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の定数倍なので, 固有ベクトルとして例えば $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる. 同様に, $\lambda_2 = 3$ に属する固有ベクトルを求めるためには連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-y=0 \\ -x-y=0 \end{cases}$$

を解けばよい. この解は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の定数倍なので, 固有ベクトルとして例えば $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が $\mathbb{R}^2$ の基底を成すことを示そう. 勝手な $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し $a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たすような $a, b \in \mathbb{R}$ が存在する. なぜなら, 連立方程式

$$\begin{cases} 2a+b=x \\ a+b=y \end{cases}$$

は解 $a = x-y, b = -x+2y$ を持つからである. つまり $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は $\mathbb{R}^2$ を生成する. 一方, $a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ とすると $\begin{pmatrix} 2a+b \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ だから $a = b = 0$ が成り立ち, $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は一次独立である.

以上より, 行列 A は対角化可能で

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

が成り立つ.

(2) A の固有多項式は $\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2$ だから A の固有値は $\lambda = 2$ のみ. $\lambda = 2$ に属する固有ベクトルは連立方程式

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を解くと $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ の (ゼロでない) 定数倍に限ることが分かる．従って固有ベクトルだけで $\mathbb{R}^2$ の基底を成すことはできず, A は対角化可能でない．

(3) A の固有多項式は $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 2 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$ なので A の固有値は $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=2$. 例えば, $\lambda_2=1$ に属する固有ベクトルを求めるには連立方程式

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

を解けばよい．行基本変形 $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ により, 解は $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ の定数倍しかなく, 固有ベクトルとしては $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ が取れる．同様に $\lambda_1=-1,\lambda_3=2$ に属する固有ベクトルを計算すると, それぞれ $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ が取れることが分かる．$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底をなすので, 行列 A は対角化可能．つまり

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}^{-1}$$

が成り立つ．

(4) A の固有多項式は $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-1 & 2\\ -2 & -2 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-1)$ だから A の固有値は $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$ のみ．$\lambda_1=-1$ に属する固有ベクトルを求めるには連立方程式

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

を解けばよい．行基本変形 $\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ より, 解は $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ と

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の一次結合であり，一次独立な固有ベクトルとしてこの $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が取れる．

$\lambda_2 = 1$ に属する固有ベクトルとしては $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底なので行列 A は対角化可能である．つまり

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

が成り立つ．

問題 2. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ をそれぞれ固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ に属する固有ベクトルとする．$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の基底となることを言えばよい．まず，一次独立性を数学的帰納法によって示す．$\boldsymbol{v}_1$ は $\mathbf{0}$ でないので一次独立である．$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ とし，

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0} \tag{1}$$

が成り立っていると仮定する．(1) に A を作用させたものは

$$\begin{aligned} A(a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n) &= a_1A\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_nA\boldsymbol{v}_n \\ &= a_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\lambda_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2}$$

$(2) - \lambda_n \times (1)$ を計算すれば

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_n)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)\boldsymbol{v}_{n-1} = \mathbf{0}.$$

ここで $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ までが一次独立だとすると，固有値が相異なるので $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ が従う．これを再び (1) に代入すれば $a_n = 0$ となり，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の一次独立性が示せた．

次に $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が $\mathbb{R}^n$ を張ることを背理法で示す．もし $\mathbb{R}^n$ の中に $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の一次結合で表せないようなベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在したと仮定すれば，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{x}$ で張られる $\mathbb{R}^n$ の部分ベクトル空間の次元は $n+1$ であるが，これは $\dim \mathbb{R}^n = n$ であることに矛盾する．従って $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は $\mathbb{R}^n$ を張らなければならない．

以上により $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底であり，行列 A は対角化可能である．

問題 3.

(1) 固有多項式は $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+5 & 2 \\ -7 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-2)$ だから A の固有値は $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$ となる．$\lambda_1 = -3$ に属する固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

$\lambda_2 = 2$ に属する固有ベクトルとしては $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ が取れる．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は $\mathbb{R}^2$ の基底なのでこの行列は対角化可能であり, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}^{-1}$. 従って

$$\begin{aligned} A^5 &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^5 & 0 \\ 0 & 2^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 \cdot (-3)^5 - 2^6 & 2 \cdot (-3)^5 - 2^6 \\ -7 \cdot (-3)^5 + 7 \cdot 2^5 & -2 \cdot (-3)^5 + 7 \cdot 2^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -353 & -110 \\ 385 & 142 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) A の固有多項式は $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -2 & 0 \\ 7 & \lambda-4 & -1 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)(\lambda-1)$ なので、固有値は $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$ となる．それぞれの固有値に属する固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, が取れる．従って

$$A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0^5 & 0 \\ 0 & 0 & 1^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -7 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

問題 4.

(1) 一般に正方行列 A, B に対して $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ が成立するので,

$\mathrm{Tr}B = \mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(APP^{-1}) = \mathrm{Tr}A$.
$\det B = \det(P^{-1}AP) = (\det P)^{-1} \det A \det P = \det A$.

(2) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ を A の固有多項式の根とすると, $|\lambda E - A| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$ と書ける．これを展開すれば $\lambda^n - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ を得る．一方, 行列 A は対角化可能だからある正則行列 P が存在して $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$ となり, (1) で示したことから $\mathrm{Tr}A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ が従う．すると A の固有多項式の $n-1$ 次の係数は $-\mathrm{Tr}A$ に等しく, 定数項は $(-1)^n \det A$ に等しい.

(3) $A = (a_{ij})$ とする．これに対し $B = (b_{ij}) := \lambda E - A$ と置けば, A の固有多項式は

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1,\ldots,p_n)\in S_n} \epsilon(p_1, \ldots, p_n) b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n}$$

担当教員：久本 智之　研究室：A343 E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

と書ける．ただし S_n は $(1,\dots,n)$ の全ての順列からなる集合であり，$\epsilon(p_1,\dots,p_n)$ は順列 $(p_1,\dots,p_n)$ の符号であった (数学演習 I 第 7 回の行列式の定義を参照)．次に，S_n から順列 $(1,\dots,n)$ を取り除いた集合を S'_n とする．このとき上式右辺は

$$\epsilon(1,\dots,n)b_{11}b_{22}\cdots b_{nn} + \sum_{(p_1,\dots,p_n)\in S'_n} \epsilon(p_1,\dots,p_n)b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}$$

に等しい．さらに

$$\begin{aligned}\epsilon(1,\dots,n)b_{11}b_{22}\cdots b_{nn} &= (\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})\\ &= \lambda^n-(a_{11}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.\end{aligned}$$

一方で，$(p_1,\dots,p_n)\in S'_n$ のときは p_i の中に少なくともふたつ $p_i\neq i$ であるようなものが存在するので，$\epsilon(p_1,\dots,p_n)b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}$ は λ について次数 $n-2$ 以下の多項式である．これは，行列式 $|\lambda E-A|$ における λ^{n-1} の係数が $-(a_{11}+\cdots+a_{nn})=-\mathrm{Tr}A$ であることを意味する．

固有多項式 $|\lambda E-A|$ に $\lambda=0$ を代入すれば，定数項として $|-A|=(-1)^n\det A$ が得られる．

問題 5.

(1) $p(x)=\sum_{i=0}^d a_i x^i$ とすると

$$\begin{aligned}p(D)=\sum_{i=0}^d a_i D^i=\sum_{i=0}^d a_i\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}^i=\sum_{i=0}^d a_i\begin{pmatrix}\lambda_1^i & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^i\end{pmatrix}\\ =\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^d a_i\lambda_1^i & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{i=0}^d a_i\lambda_n^i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p(\lambda_1) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & p(\lambda_n)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 行列 A の固有多項式を $p(\lambda)=|\lambda E-A|=\sum_{i=0}^n c_i\lambda^i$ という風に書く．A は対角化可能だったから，A の固有値 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ とある正則行列 P を用いて $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$ が成立している．すると

$$\begin{aligned}p(A)=p\left(P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}\right)=\sum_{i=0}^n c_i\left(P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}\right)^i\\ =P\sum_{i=0}^n c_i\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}^i P^{-1}=P\begin{pmatrix}p(\lambda_1) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & p(\lambda_n)\end{pmatrix}P^{-1}.\end{aligned}$$

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

最後の変形で (1) を用いた。

固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は定義より固有多項式の根だから $p(\lambda_1) = \cdots = p(\lambda_n) = 0$. つまり上の行列は零行列である.

問題 6.

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ であった. A の固有多項式は $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-2)$ だから, 固有値は $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ となる. $\lambda_1 = -1$ に属する固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる. $\lambda_2 = 2$ に属する固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる. これらのベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底を成すから, 行列 A は対角化可能である. つまり

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

が成り立つ.

(2) (1) の計算より,

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(-1)^k + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k \\ (-1)^{k+1} + 2^k & 2(-1)^k + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k \\ (-1)^{k+1} + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k & 2(-1)^k + 2^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

従って,

- 頂点 1 からスタートしてちょうど k 本を通り帰ってくるルートの総数は $\frac{2(-1)^k+2^k}{3}$.
- 頂点 2 からスタートしてちょうど k 本を通り帰ってくるルートの総数は $\frac{2(-1)^k+2^k}{3}$.
- 頂点 3 からスタートしてちょうど k 本を通り帰ってくるルートの総数は $\frac{2(-1)^k+2^k}{3}$.

これらの値は確かに自然数になっていることに注意せよ。また、対称性より、求める値は頂点の選び方に依らないはずで、実際そうなっている。