担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

行列の対角化

実施日：December 20, 2017

行列の対角化

前回に引き続き、n 次正方行列 A が定める線形写像 $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を考える。$f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ である。

定義 1. ある基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に関する表現行列の対角成分以外が全てゼロ、つまり

$$A(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となるとき、A は対角化可能であるという。上式の $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ は数ベクトルを横に並べたものだから、n 次正方行列と見なすことができる。この行列を P と書くと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ。右辺の形をした行列を対角行列と呼ぶ。

例えば、第 7 回の問題 3, 4 で扱った線形写像

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を考える。問題 3 の (3) でやったように、基底

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に関する表現行列は対角成分以外がゼロである。つまり、行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ は対角化可能である。$P = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ であり、確かに $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ が成り立っている。

では、このような基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を見つけるにはどうしたらよいか。

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

例題 1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ は対角化可能か？もし可能ならば、A を対角化せよ。

【解答】 前回の例題 1, 2 で示したように、A の固有値は $\lambda_1 = 4$ と $\lambda_2 = 1$ であり、固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れた。これは

$$A(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を意味する。$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ が $\mathbb{R}^2$ の基底を成すことは各自確かめよ。これで A を対角化できることが分かった。$P = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ であり、確かに $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立っている。

実は、上の解答で大切なのは $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ が $\mathbb{R}^2$ の基底を成すというところである。一般には、n 次正方行列 A の固有ベクトルだけで $\mathbb{R}^n$ の基底を作れるとは限らない。

例題 2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ は対角化可能か？もし可能ならば、A を対角化せよ。

【解答】 今の場合、仮に A が対角化可能であるとすれば

$$A(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

と書けるが、これは $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が基底であって、しかも A の固有ベクトルになっていることを意味している。A の固有多項式は

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2$$

なので、固有値は 3 のみである。付随する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の定数倍しかない。だからそのような基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は存在し得ない。つまり A は対角化できない。

一般には次の定理が成り立つ。

定理 1. n 次正方行列 A に対し、次の条件は同値である。

(i) A は対角化可能

(ii) A の固有ベクトルだけで $\mathbb{R}^n$ の基底が作れる

このとき、対角行列の成分には A の固有値が現れる。

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 1. (提出問題) 以下の行列は対角化可能か？もし可能ならば、対角化せよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

問題 2. n 次正方行列 A の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ が全て異なれば、A は対角化可能であることを示せ。

対角化の応用

例題 3. 行列 $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ の 6 乗を計算せよ。

【解答】 この行列は対角化可能だった。$P = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ に対し $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立っている。すると、$A = P\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ だから

$$\begin{aligned} A^6 &= \overbrace{P\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}\cdots P\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}}^{6\text{ 個}} \\ &= P\overbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{6\text{ 個}}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 4^6 & 0 \\ 0 & 1^6 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^6 & 0 \\ 0 & 1^6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 8191 & -8190 \\ 4095 & -4094 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と計算できる。

　前回は同じ 6 乗を Cayley-Hamilton の定理を用いて計算した。余力があれば、2 つの計算方法の優れている点を比較検討してみよ。

問題 3. (提出問題) 次の行列を対角化することによって、A の 5 乗を計算せよ。

(1) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -7 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

問題 4.

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(1) 一般に、n 次正方行列 A, B 及び n 次正則行列 P が $P^{-1}AP = B$ という関係式を満たすとき、$\mathrm{Tr}A = \mathrm{Tr}B$, $\det A = \det B$ が成り立つことを示せ。

(2) n 次正方行列 A が対角化可能であるとして、固有多項式 $|\lambda E - A|$ の係数を考える。$n-1$ 次の係数は $-\mathrm{Tr}A$ に、0 次の係数は $(-1)^n \det A$ に等しいことを (解と係数の関係を用いて) 示せ。

(3) (2) の結論は A が対角化可能でなくても成り立つ。固有多項式について今考えている係数を A の成分で直接書くことにより、これを示せ。

問題 5.

(1) 勝手な多項式 $p(x)$ と対角行列 $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ に対し、x に D を代入して得られる行列 $p(D)$ は対角行列 $\begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p(\lambda_n) \end{pmatrix}$ に等しいことを示せ。

(2) (1) を用いて、対角化可能な行列に対して Cayley-Hamilton の定理を証明せよ。

問題 6. 第 7 回の問題 7 の続きを考える。

(1) 問題 7 (2) のグラフに対応する行列 A を対角化せよ。

(2) 同じグラフについて、ある頂点から出発して丁度 k 本の線を通り元の頂点に戻ってくるルートを考える。このようなルートの総数を求めよ。