担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

2変数関数の極値問題

実施日：December 13, 2017

今回の演習問題では、扱う関数は常に C^3 級であるとする。

2変数関数の極大値と極小値

定義 1. 2変数関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) を中心とする小さな円領域

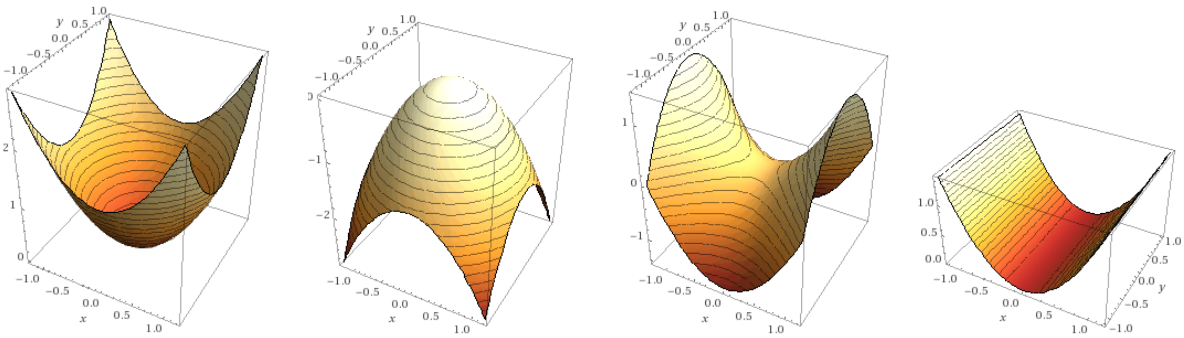
$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < r \right\}$$

において $f(a,b) \geq f(x,y)$ を満たすとき、$f(x,y)$ は点 (a,b) で 極大であるという。$f(a,b) \leq f(x,y)$ を満たすとき、点 (a,b) で極小であるという。

補足 1. 極大値と最大値は違う。極大 (極小) であるという性質は、点 (a,b) の近くだけを見て考えていることに注意せよ。

問題 1. 以下の関数に対して、微分法を用いずグラフの概形を説明せよ。各々の関数は原点で極大値もしくは極小値を持つか？ 答えだけ述べよ。

(1) $f(x,y) = x^2+y^2$　(2) $f(x,y) = -x^2-y^2$　(3) $f(x,y) = x^2-y^2$　(4) $f(x,y) = x^2$



(作図は Wolfram Alpha を利用した。グラフ上の曲線は等高線である。日本では昔から (3) のような地形を峠と呼ぶ。)

1変数のときと同様に、2階偏微分を用いて極値を求めたい。上の例 (3) を考えると、$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$ である一方 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -2 < 0$ となっている。このように、それぞれの偏微分係数だけを見ていてはグラフの様子は分からない。そこで、2次近似

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\ (x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\ (y-b) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\ (x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\ (x-a)(y-b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\ (y-b)^2 \\ &+ o((x-a)^2+(y-b)^2) \end{aligned}$$

を思い出す。

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

定理 1. 2 変数関数 $f(x,y)$ が点 $(x,y)=(a,b)$ において極値を持つならば

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

が成り立つ。

証明は第 6 回の問題 8 を参照せよ。しかるに、極大値をとる点もしくは極小値をとる点のまわりでは、$f(x,y)-f(a,b)$ は二次関数

$$A(x-a)^2+2C(x-a)(y-b)+B(y-b)^2$$

によって近似できる。このような関数の典型的な例が問題 1 である。

問題 2. 二次関数を

$$Ax^2+2Cxy+By=\begin{pmatrix}x,y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & C\\ C & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

というように行列を用いて表す。このとき、次の命題が成り立つことを示せ。

$$Ax^2+2Cxy+By \text{ が原点で最小} \quad\Leftrightarrow\quad A+B\geq 0 \text{ かつ } AB-C^2\geq 0.$$

ヒント：今は $\Leftarrow$ が重要。y を止めて x についての二次式と見なし、平方完成する。

定理 2. 2 変数関数 $f(x,y)$ の極値を調べるには、

(1) まず $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ となる (a,b) を全て求める。

(2) 次に (1) で求めた各 (a,b) での **Hesse** 行列

$$H_f(a,b)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\end{pmatrix}$$

のトレースと行列式を計算する。このとき、

(i) $\det H_f(a,b)>0$ かつ $\mathrm{Tr}\ H_f(a,b)<0$ ならば $f(a,b)$ は極大

(ii) $\det H_f(a,b)>0$ かつ $\mathrm{Tr}\ H_f(a,b)>0$ ならば $f(a,b)$ は極小

(iii) $\det H_f(a,b)<0$ ならば $f(a,b)$ は極大・極小ではあり得ない

(iv) $\det H_f(a,b)=0$ のときは、このデータだけでは何も分からない。

補足 2.

- (i) の状況で、さらに $f(a,b)$ は (a,b) の近くで他に極大値を取らないとまで言える。

担当教員：久本 智之 研究室：A343 E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

- (iv) の状況としては、例えば $f(x,y)=x^3$ がある。(グラフを描いてみよ)
- 3 変数になるとトレースと行列式だけでは足りない。実は、H_f の固有値が背景にある。

例題 1. 関数 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ の極値をすべて求めよ。

【解答】 まず、定理 1 を根拠に $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x=0$ を解く。そうすると、極値が存在するならば $(x,y)=(0,0),(1,1)$ に限ることが分かる。

- $(x,y)=(0,0)$ が極値かどうか考えよう。2 階偏微分を計算すると
$$H_f(0,0)=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -3 & 6\end{pmatrix}.$$
Tr $H_f(a,b)=6$, $\det H_f(0,0)=-9$ より $f(0,0)=0$ は極値ではない。
- $(x,y)=(1,1)$ が極値かどうか考えよう。2 階偏微分を計算すると
$$H_f(1,1)=\begin{pmatrix}6 & -3\\ -3 & 6\end{pmatrix}.$$
Tr $H_f(1,1)=12$, $\det H_f(1,1)=27$ より $f(1,1)=-1$ は極小値である。

問題 3. (提出問題) 以下の関数 $f(x,y)$ の極値を全て求めよ。(ただし $\alpha>\beta>0$.)

(1) $f(x,y)=x^2-xy+y^2+2x-y+7$

(2) $f(x,y)=x^4+y^2+2x^2-4xy+1$

(3) $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}(\alpha x^2+\beta y^2)$

問題 4. 関数 $f(x,y)=-x^2-y^4$ の極値を全て求めよ。

条件付き極値問題

実際には、x,y が何かしらの束縛条件を満たしているときに関数 $f(x,y)$ の極値を求めることが多い。例えば、$x+y=1$ という条件を守った上で $f(x,y)=xy$ を最大にするには x,y をどう選べばよいか...？ やや発展的な話題だが、次の定理は極めて有用である。

定理 3. (Lagrange の未定乗数法) 関数 $g(x,y)$ に対して、x,y が条件 $g(x,y)=0$ を満たしながら動くとする。関数 $f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で極値を取り、しかも $\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)=0$ ではないとすると、ある実数 λ が存在して
$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)\\ \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\end{pmatrix}$$
が成り立つ。

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 5. $f(x,y)=xy, g(x,y)=x+y-1$ に Lagrange の未定乗数法を適用すると、$x=y$ が導かれることを示せ。$x+y=1$ という条件のもと $f(x,y)=xy$ は確かに $\sqrt{2}$ 以下であることを、幾何平均は算術平均を超えないという不等式:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \qquad (x,y \geq 0)$$

を用いて示せ。

> **例題 2.** x,y が $x^2+y^2=1$ を満たしながら変化するとき、関数 $f(x,y)=x+y$ の極大値・極小値を求めよ。

【解答】 $g(x,y)=x^2+y^2-1$ とおいて Lagrange の未定乗数法 (定理 3) を適用する。いったん "未定乗数" λ を用意して

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=1-2\lambda x=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}-\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=1-2\lambda y=0$$

から λ を消去すれば、$x=y$ という条件が得られる。この条件を $x^2+y^2=1$ に連立させれば $(x,y)=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}),(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ となる。つまり、極値をとる点があるとすればこのいずれかである。

点 $(x,y)=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ について調べよう。**この点の近くなら、**$x^2+y^2=1$ を $y=\sqrt{1-x^2}$ というように y について解くことができる。すると $f(x,y)=x+y=x+\sqrt{1-x^2}$ は x についての 1 変数関数 $u(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ と見なせる。$\frac{d^2u}{dx^2}=-(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$ は $x=1/\sqrt{2}$ において負の値をとるから、$u(x)$ は $x=1/\sqrt{2}$ において極大値をとる。よって、$f(x,y)$ は $(x,y)=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ において極大値をとる。同様に、$f(x,y)$ は $(x,y)=(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ において極小値をとることが分かる。

補足 3.

- 実はこれは、傾き -1 の直線をいろいろ動かしたとき、原点を中心とする半径 1 の円と交わるための条件を求めている。だから、Lagrange の未定乗数法を使わずとも答えは直ちに分かるべきである。(Cauchy-Shwarz の不等式からも分かる)
- 解答の後半を見ると、「多少面倒でも、手当たり次第に色々な点のまわりで $x^2+y^2=1$ を x や y について解いて、1 変数関数の極大極小問題に帰着させればよいのではないか...？」と思うかもしれない。実は定理 3 をそうやって証明するのである。「$\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)=0$ ではない」という仮定は、点 (a,b) のまわりで $g(x,y)=0$ を x や y について解くためのものである。(とは言っても $g(x,y)=0$ を具体的に解くのは大抵難しいから定理 3 が有用となる)

問題 6. (提出問題)

(1) x,y が $x,y>0,\ x+y=1$ を満たしながら動くとき、関数 $f(x,y)=x\log x+y\log y$ の極小値を求めよ。

(2) x,y が $x^2+y^4=1$ を満たしながら動くとき、関数 $f(x,y)=xy$ の極大値・極小値を求めよ。

問題 7. x,y が $(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=0$ を満たしながら動くとき、関数 $f(x,y)=x^2+y^2$ の極大値・極小値を求めよ。