担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

固有値と固有ベクトル 解説

問題 1.

(1) $p_i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}\boldsymbol{e}_j$ (δ_{ij} は Kronecker のデルタ) なので

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 行列の積を直接計算することで $P_i\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i$ を得る．したがって, $\boldsymbol{e}_i$ は P_i の固有値 1 に属する固有ベクトルである．

問題 2.

(1) A の固有多項式は $|tE - A| = (t+2)(t-3)$ なので, A の固有値は $\lambda = -2, 3$. 固有値 λ に属する固有ベクトルは $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の非自明解なので, これを解けば -2 に属する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 3 に属する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が挙げられる．

(2) A の固有多項式は $|tE - A| = (t+1)(t+2)(t-3)$ なので A の固有値は $-1, -2, 3$. それぞれの固有値に属する固有ベクトルとして順に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ が挙げられる．

(3) A の固有多項式は $|tE - A| = t(t-1)(t-5)$ なので A の固有値は $0, 1, 5$. それぞれの固有値に属する固有ベクトルとして順に $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が挙げられる．

問題 3. $\lambda \in \mathbb{R}$ を A の固有値, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ を λ に属する A の固有ベクトルとする．このとき, $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ なので $A^k\boldsymbol{v} = A^{k-1}(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda(A^{k-1}\boldsymbol{v}) = \cdots = \lambda^k\boldsymbol{v}$ が成り立つ．$A^k = O$ だったので, これより $\lambda^k\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を得る．$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ なので $\lambda = 0$ である．よって, A の固有値は 0 に限る．

問題 4. i) $A\boldsymbol{0} = \lambda\boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{0} \in V_\lambda$ だから, $V_\lambda \neq \emptyset$ である．
ii) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V_\lambda$ とすると $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$, $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ なので $A(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{v} = \lambda(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$ が成り立つ．したがって, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in V_\lambda$ である．
iii) $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v} \in V_\lambda$ とすると $A(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha(A\boldsymbol{v}) = \alpha(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda(\alpha\boldsymbol{v})$ が成り立つ．したがって, $\alpha\boldsymbol{v} \in V_\lambda$ である．
i), ii), iii) より V_λ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．
　また, 固有値の定義より V_λ は確かに $\boldsymbol{0}$ でないベクトルを含んでいる．

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 5. A の固有多項式は $|tE-A|=(t+1)^2(t-1)$ なので A の固有値は $\lambda=-1,1$ である．対応する固有空間は連立方程式 $(\lambda E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解くことで求めることができるから，

$$V_{-1}=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\ ;\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\},\quad V_1=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ ;\ \alpha\in\mathbb{R}\right\}$$

である．$\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ は V_{-1} の基底，$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ は V_1 の基底である (一次独立性の証明は省略する).

問題 6. $\boldsymbol{v}\in V_\lambda\cap V_{\lambda'}$ とする．$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ を示せば良い．$\boldsymbol{v}\in V_\lambda\cap V_{\lambda'}$ より $A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$, $A\boldsymbol{v}=\lambda'\boldsymbol{v}$ だから $(\lambda-\lambda')\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ が成り立つ．$\lambda\neq\lambda'$ より $\lambda-\lambda'\neq 0$ なので，両辺を $\lambda-\lambda'$ で割れば $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ を得る．

問題 7.

(1) A の固有多項式は $|tE-A|=t^2-t-2$ なので，Cayley-Hamilton の定理より $A^2=A+2E$ である．したがって，

$$\begin{aligned}A^5&=A(A^2)^2=A(A+2E)^2=A(A^2+4A+4E)=A(A+2E)+4(A+2E)+4A\\&=11A+10E=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}31&-33\\-33&31\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2) A の固有多項式は $|tE-A|=t^3-3t-2$ なので，Cayley-Hamilton の定理より $A^3=3A+2E$ である．一方，直接計算することで $A^2=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-3&-3\\3&5&5\\6&6&8\end{pmatrix}$ である．したがって，

$$A^5=A^2(3A+2E)=3A^3+2A^2=2A^2+9A+6E=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-35&-33&-33\\33&31&33\\66&66&64\end{pmatrix}.$$

問題 8. 数列の記号 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を略記して $\{a_n\}$ と書くことにする．

(1) 漸化式より $b_{n+2}=a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}=b_{n+1}+b_n$ である．したがって，$\{b_n\}\in V$ である．

次に $f\colon V\to V$ が線形写像であることを示そう．

i) $\{a_n\},\{a'_n\}\in V$ に対し $f(\{a_n\})=\{b_n\}$, $f(\{a'_n\})=\{b'_n\}$ と書くと，$f(\{a_n+a'_n\})=\{b_n+b'_n\}$ が成り立つ．従って，

$$\begin{aligned}f(\{a_n\}+\{a'_n\})&=f(\{a_n+a'_n\})=\{b_n+b'_n\}\\&=\{b_n\}+\{b'_n\}=f(\{a_n\})+f(\{a'_n\}).\end{aligned}$$

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

ii) $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{a_n\} \in V$ に対し $f(\{a_n\}) = \{b_n\}$ と書くと, $f(\{\alpha a_n\}) = \{\alpha b_n\}$ が成り立つ．従って,

$$f(\alpha\{a_n\}) = f(\{\alpha a_n\}) = \{\alpha b_n\} = \alpha\{b_n\} = \alpha f(\{a_n\}).$$

i), ii) より $f\colon V \to V$ は線形写像である．

(2) λ が線形写像 f の固有値であるとは, あるゼロでない数列 $\{a_n\}$ に対し

$$f(\{a_n\}) = \lambda\{a_n\} \;\Leftrightarrow\; a_{n+1} = \lambda a_n$$

を満たすことである．特に $a_{n+2} = \lambda a_{n+1} = \lambda^2 a_n$．一方, $\{a_n\} \in V$ だから漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ が成り立つ．従って $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n = (\lambda + 1)a_n$．すると $(\lambda^2 - \lambda - 1)a_n = 0$ となるが, $\{a_n\}$ がゼロでない数列ということは適当な n に対し $a_n \neq 0$ であるから, $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ が必要である．この 2 次方程式を解くと $\lambda = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ となり, このように求めた λ に対して改めて $a_{n+1} = \lambda a_n$ を解けば

$$a_n = A\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^n \quad (A \text{ はゼロでない定数})$$

なる数列がそれぞれの固有値に属する固有ベクトルを与えることがわかる．