担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

固有値と固有ベクトル

実施日：December 7, 2016

線形代数の後半は、それぞれの状況に応じて「良いベクトル」を求めることがテーマとなる。

固有値と固有ベクトル

ここでは特に n 次正方行列 A を取り、数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を $A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に送る線形写像 $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を考えよう。$f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ である。

定義 1. n 次正方行列 A に対し、ある実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ と**ゼロでない**ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ があって

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

を満たすとき、λ を A の固有値、v を A の λ に属する固有ベクトルという。

補足 1.

- $\boldsymbol{v}$ をゼロでないとしたのは、ゼロベクトルならどんな λ に対しても $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ が成り立ってしまうからである。
- $\boldsymbol{v}$ が固有ベクトルだとすると、$\boldsymbol{v}$ を勝手に定数倍したベクトル $c\boldsymbol{v}$ も、同じ固有値 λ に属する固有ベクトルである。
- 一般のベクトル空間 V と線形変換 $f : V \to V$ に対しても、全く同様に固有値・固有ベクトルが定義できる。

例題 1. 行列 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ に対し、$\lambda = 4$ は A の固有値で、$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は A の 4 に属する固有ベクトルであることを確かめよ。3 倍したベクトル $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ も 4 に属する固有ベクトルであることを確かめよ。

【解答】 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ はゼロベクトルではなく、確かに

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たしている。さらに、

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 1. $i=1,2,3$ に対し線形写像 $p_i:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を

$$p_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\0\\0\end{pmatrix},\quad p_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x_2\\0\end{pmatrix},\quad p_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\x_3\end{pmatrix}$$

と定める。これらは第 i 成分への**射影**と呼ばれる。

(1) $\mathbb{R}^n$ の標準基底

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

に関する p_i の表現行列 P_i を求めよ。

(2) 各 i に対し、$\boldsymbol{e}_i$ は P_i の「固有値 1 に属する固有ベクトル」であることを示せ。

固有値を見つけるうまいやり方がある。$A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$ を $(\lambda E-A)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ と変形すれば、$\boldsymbol{v}$ がゼロでないという仮定により、$\lambda E-A$ は正則行列ではあり得ない。つまり $|\lambda E-A|=0$ が成り立つ。これを λ についての方程式と見て解けば固有値が求められる。今の議論を逆に追えば、$|\lambda E-A|=0$ を満たす λ は必ず固有値になることもわかる。

定理 1. n 次正方行列 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ の固有値は、λ についての n 次多項式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

の根である。$|\lambda E-A|$ を A の**固有多項式**と呼ぶ。

固有値が見つかれば、固有ベクトルを求めるのは連立一次方程式の問題である。

例題 2. 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix}7 & -6\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ の固有値を全て求め、付随する固有ベクトルを 1 つずつ挙げよ。

【解答】

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-7 & 6\\ -3 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+4=(\lambda-1)(\lambda-4)$$

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

なので、固有値は $\lambda = 1, 4$ である。次に、固有ベクトルを求める。ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が固有値 4 に付随する固有ベクトルであるとは

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を満たすことだった。これは x と y に関する連立一次方程式である。これを解けば $x : y = 2 : 1$ となる。だから固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ などが取れる。同様に、固有値 1 に付随する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ などが取れる。

問題 2. (提出問題) 次の行列の固有値を全て求め、付随する固有ベクトルを 1 つずつ挙げよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$　(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

問題 3. n 次正方行列 A が、ある自然数 k について $A^k = 0$ を満たしている時、A の固有値は 0 に限ることを示せ。(このような行列を**べき零行列**という)

固有空間

今までの例では、固有値に対し固有ベクトルは定数倍を除いて 1 つしかなかったが、一般にはそうならない。

定義 2. n 次正方行列 A の固有値 λ に対し

$$V_\lambda := \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v} \right\}$$

とおくと、これは $\mathbb{R}^n$ の部分ベクトル空間になる。V_λ を A の固有値 λ に対する**固有空間**という。

問題 4. A の任意の固有値 $\lambda \in \mathbb{R}$ について、対応する固有空間 V_λ は $\mathbb{R}^n$ の部分ベクトル空間になることを示せ。また、V_λ は $\mathbf{0}$ でないベクトルを含んでいることを示せ。

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

例題 3. 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値を全て求め、それぞれの固有空間の基底を 1 組ずつ挙げよ。

【解答】 固有多項式は $|\lambda E - A| = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$ となるから、固有値は $2, -1$ である。固有空間 V_2, V_{-1} を求めよう。

ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ が固有空間 V_{-1} に含まれるための条件は

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff x + y + z = 0$$

すなわち、

$$V_{-1} = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; A\boldsymbol{v} = (-1)\boldsymbol{v} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}.$$

このベクトル空間の基底としては例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が取れる。

同様にして、V_2 の基底としては $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ などが挙げられることがわかる。

問題 5. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値を全て求め、それぞれの固有空間の基底を 1 組ずつ与えよ。

問題 6. 異なる固有値 $\lambda \neq \lambda'$ に対する固有空間 $V_\lambda, V_{\lambda'}$ は、ゼロベクトルしか共通の要素を持たないことを示せ。

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

Cayley-Hamilton の定理

固有多項式に関する次の Cayley-Hamilton の定理は有名であり、また行列のべき乗などを計算する上でも有用である。(後でやるが、実は固有値そのものを用いることでもっと系統的に行列のべき乗を計算することが可能になる。)

定理 2. n 次正方行列 A を、その固有多項式

$$|\lambda E - A| = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

に代入して得られる行列

$$A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 E$$

は零行列に等しい。ただし A の 0 乗は単位行列と考えている。

例えば先に扱った行列 $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ の場合、確かに $A^2 - 5A + 4E = O$ が成り立っている。(各自直接計算により確かめよ)

例題 4. 行列 $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ に対し、Cayley-Hamilton の定理を用いて A の 6 乗を計算せよ。

【解答】 Cayley-Hamilton の定理より $A^2 - 5A + 4E = O$ が成り立つ。すると

$$\begin{aligned} A^6 &= (A^2)^3 \\ &= (5A - 4E)^3 = 125A^3 - 300A^2 + 240A - 64E \\ &= 125A(5A - 4E) - 300(5A - 4E) + 240A - 64E = 625A^2 - 1760A + 1136E \\ &= 625(5A - 4E) - 1760A + 1136E = 1365A - 1364E \\ &= \begin{pmatrix} 8191 & -8190 \\ 4095 & -4094 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

問題 7. (提出問題) Cayley-Hamilton の定理を用いて、次の行列の 5 乗を計算せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -5/2 & -3/2 & -3/2 \\ 3/2 & 1/2 & 3/2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

担当教員：久本 智之 研究室：A343 E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 8. (発展問題) 2 項間漸化式

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad (n \geq 1)$$

を満たす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の全体を V とおくと、これは 2 次元のベクトル空間なのであった。

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V$ に対し、$b_n := a_{n+1}$ として定まる数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はまた V の要素であり、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を対応させる写像 $f : V \to V$ は線形写像であることを示せ。

(2) f の固有値を全て求め、付随する固有ベクトルを 1 つずつ挙げよ。

補足 2. 固有多項式の根は一般に複素数となる。固有値として複素数を許すと固有ベクトルの成分にも複素数が現れてくる。従って、初めから複素数を成分としたベクトルや行列を考えるのが自然になってくる。今回は固有値が全て実数になる状況のみを扱った。