担当教員： 久本 智之　研究室： A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

線形代数の復習　解答例

問題 1.

(1) 勝手なベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は、ある実数の組 a, b, c を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

と表すことができる。実際、a, b, c についての方程式と見て $(*)$ を解くと

$$a = \frac{-4x - 3y + 6z}{8}, \quad b = \frac{4x + y - 2z}{8}, \quad c = \frac{3y - 2z}{4}$$

と取ればよいことがわかる。一方、

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{$**$}$$

を満たす実数の組 a, b, c は $a = b = c = 0$ しかない。これも $(**)$ を a, b, c について解けば確かめられる。以上より、与えられたベクトルの組は $\mathbb{R}^3$ の基底である。

(2) ある実数の組 a, b を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

と表すことができないベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が存在する。つまり与えられたベクトルの組は $\mathbb{R}^3$ の基底でない。実際、$x = y = 2$ に対して $(*)$ を満たす a, b は $a = b = 1$ のみであり、それなら $z = 5$ でなければならない。だから、例えば $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ などは $(*)$ のようには表せない。

(3) 与えられたベクトルの組は一次独立でなく、従って $\mathbb{R}^3$ の基底ではない。実際、

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{$*$}$$

を a, b, c について解くと $a = b = c = 0$ の他に $a = 1, b = -1, c = -2$ が得られる。

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 2.

(1) これは線形写像である。勝手な定数 $c \in \mathbb{R}$ について

$$f\begin{pmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx+cy-cz \\ -cx+cz \\ cx-cy \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} x+y-z \\ -x+z \\ x-y \end{pmatrix}$$
$$= cf\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

が成り立ち、勝手な 2 つのベクトルに対して

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (x+x')+(y+y')-(z+z') \\ -(x+x')+(z+z') \\ (x+x')-(y+y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ -x+z \\ x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+y'-z' \\ -x'+z' \\ x'-y' \end{pmatrix}$$
$$= f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

が成り立つからである。

(2) これも線形写像である。勝手な定数 $c \in \mathbb{R}$ について

$$f\begin{pmatrix} cx \\ cy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4cx+cy \\ cx+3cy \\ cy \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 4x+y \\ x+3y \\ y \end{pmatrix}$$
$$= cf\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立ち、勝手な 2 つのベクトルに対して

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4(x+x')+(y+y') \\ (x+x')+3(y+y') \\ (y+y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x+y \\ x+3y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x'+y' \\ x'+3y' \\ y' \end{pmatrix}$$
$$= f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

が成り立つからである。

(3) これは線形写像でない。実際、上と同じことをやろうとすると定数 $c \in \mathbb{R}$ について一般に

$$f\begin{pmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx-cz \\ cy+1 \end{pmatrix}$$
$$\neq c\begin{pmatrix} x-z \\ y+1 \end{pmatrix} = cf\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる。($c=0$ とすれば等号は確かに成り立っていない。)

問題 3.

(1) $\boldsymbol{v}_1$ および f の定義に基づいて計算すると

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_1) = f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}4\cdot 0+0\\1+0\\1+2\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \\ &= 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

従って $f(\boldsymbol{v}_1)=\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3$ を得る。同様に $f(\boldsymbol{v}_2)=4\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_3$, $f(\boldsymbol{v}_3)=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ を得る。

(2) 写像は同じだが基底は異なることに注意する。計算は上と同様で、

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_1) = f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}4\cdot 0+0\\1+0\\1+2\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \\ &= (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

従って $f(\boldsymbol{v}_1)=-\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_3$ を得る。同様に $f(\boldsymbol{v}_2)=3\boldsymbol{v}_1-2\boldsymbol{v}_2+3\boldsymbol{v}_3$, $f(\boldsymbol{v}_3)=3\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2+3\boldsymbol{v}_3$ を得る。

(3) これも同じようにやる。

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_1) = f\begin{pmatrix}7\\4\\5\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}21\\12\\15\end{pmatrix} \\ &= 3\cdot\begin{pmatrix}7\\4\\5\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

従って $f(\boldsymbol{v}_1)=3\boldsymbol{v}_1$ を得る。同様に $f(\boldsymbol{v}_2)=-\boldsymbol{v}_2$, $f(\boldsymbol{v}_3)=-2\boldsymbol{v}_3$ を得る。

問題 4. (1) $\begin{pmatrix}0&4&1\\1&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}-1&3&3\\0&-2&-1\\1&3&3\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 5.

(1) 複素数 $\alpha = a + \sqrt{-1}b$ を $\mathbb{R}^2$ の元 (a,b) と同一視したとき, 一次変換 f_α による $(1,0)$ の行き先は $(a+\sqrt{-1}b)(1+\sqrt{-1}\cdot 0) = a+\sqrt{-1}b$ であり, 基底 $(1,0), (0,1)$ を用いて表せば $a(1,0)+b(0,1)$. 同様にして $(0,1)$ の行き先は $(a+\sqrt{-1}b)(0+\sqrt{-1}\cdot 1) = -b+a\sqrt{-1}$ であり, 基底 $(1,0), (0,1)$ を用いて表せば $-b(1,0)+a(0,1)$. よって, f_α の表現行列は $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ で与えられる.

(2) ある一次変換によりベクトル $(1,0)$ が (a,c) に, ベクトル $(0,1)$ が (b,d) に移される時, 表現行列は $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で与えられる.「原点を中心とした角度 θ 回転」により, 点 $(1,0)$ は $(\cos\theta, \sin\theta)$ に, 点 $(0,1)$ は $(-\sin\theta, \cos\theta)$ に移されるから, 表現行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となる.

(3) $\alpha = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ の定める一次変換 f_α と $\beta = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$ の定める一次変換 f_β を考える. (2) より基底 $(1,0), (0,1)$ に関する f_α と f_β の表現行列はそれぞれ, $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ で与えられる. 一方, $f_\alpha \circ f_\beta$ は「原点を中心とした角度 $\theta+\varphi$ 回転」に他ならないから, $\begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix}$ で与えられる. さらに, 線形写像の合成は表現行列の積に対応しているから

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix}$$

が従う. これを対応する複素数によって書けば

$$(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) = \cos(\theta+\varphi) + \sqrt{-1}\sin(\theta+\varphi)$$

が得られる.

問題 6.

(1) 直接計算により

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x})\cdot f(\boldsymbol{y}) &= \begin{pmatrix} \cos\theta x_1 - \sin\theta x_2 \\ \sin\theta x_1 + \cos\theta x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta y_1 - \sin\theta y_2 \\ \sin\theta y_1 + \cos\theta y_2 \end{pmatrix} \\ &= (\cos\theta x_1 - \sin\theta x_2)(\cos\theta y_1 - \sin\theta y_2) + (\sin\theta x_1 + \cos\theta x_2)(\sin\theta y_1 + \cos\theta y_2) \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

と確かめられる。g についても同様である。

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(2) 標準基底 $\boldsymbol{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関する h の表現行列を $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする.

$$A\boldsymbol{e}_1 \cdot A\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1, \quad A\boldsymbol{e}_2 \cdot A\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2$$

から $a^2+c^2 = b^2+d^2 = 1$ を得る. 従って, ある $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ を用いて $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\varphi \\ \sin\theta & \cos\varphi \end{pmatrix}$ とおいてよい. さらに

$$A\boldsymbol{e}_1 \cdot A\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2$$

より $\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi = 0$ を得る. これは, ある整数 m について $\theta + \varphi = m\pi$ が成り立つことを意味する. m の偶奇に応じて A の形が f, g のように決まる.

問題 7.

(1) i, j を結ぶ線の数と j, i を結ぶ線の数は同じなので対称行列となる.

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

(3) $k = 1$ のとき, A の第 (i, j) 成分は頂点 i, j をただ 1 本の線を通過して行くルートである. $k = 2$ のときを考えてみよう. $1 \le r \le n$ なる整数 r に対して, 頂点 i から頂点 r までただ 1 本の線を通過するルートの個数は a_{ir} であり, 一方で頂点 r から j までただ 1 本の線を通過するルートの個数は a_{rj} である. 従って, 頂点 i から j までで 2 本の線を通過するルートの総数は $\sum_{r=1}^n a_{ir}a_{rj}$ と書ける. これは行列 A の第 i 行と第 j 列の各成分を掛けて足し上げたもので, すなわち A^2 の第 (i, j) 成分である.

一般の場合は k に関する数学的帰納法を用いる. A^k の (i, j) 成分を $a(k)_{ij}$ で表そう. 帰納法の仮定より, 頂点 i から頂点 r まで丁度 $k-1$ 本の線を通過するルートの総数は $a(k-1)_{ir}$ である. 一方で, 頂点 r から j までただ 1 本の線を通過して行くルートは $a(1)_{rj}$ 個ある. 従って, 頂点 i から j まで丁度 k 本の線を通過するルートは $\sum_{r=1}^n a(k-1)_{ir}a(1)_{rj}$ 個ある. これは行列 A^{k-1} の第 i 行の各成分と行列 A の第 j 列の各成分をそれぞれ掛け合わせて足し上げたものであり, 行列 $A^{k-1}A = A^k$ の第 (i, j) 成分 $a(k)_{ij}$ に他ならない.

問題 8.

(1) ある $a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R}$ を用いて $\boldsymbol{v}'_1 = a_{11}\boldsymbol{v}_1 + a_{21}\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}'_2 = a_{12}\boldsymbol{v}_1 + a_{22}\boldsymbol{v}_2$ と表せる. 行列 P として $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ を取ればよい. $\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2$ が $\mathbb{R}^2$ の基底なので P は正則である (第 3 回問題 10 を参照せよ).

(2) $(f(\boldsymbol{v}'_1), f(\boldsymbol{v}'_2)) = (\boldsymbol{v}'{}_1, \boldsymbol{v}'_2)A' = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)PA'$. 一方で, f の線形性から

$$(f(\boldsymbol{v}'_1), f(\boldsymbol{v}'_2)) = (f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2))P = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)AP.$$

表現行列の一意性 (第 5 回定義 5 を参照せよ) より $PA' = AP$ を得る. P は正則ゆえ $A' = P^{-1}AP$.

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 9.

(1) 紛らわしいので, 複素数の全体をひとまず K と置こう．どんな複素数も 1 という元の複素数倍で表せるから, K を $\mathbb{C}$ ベクトル空間とみなすと, 1 だけからなる基底が取れることになる．一方, K を $\mathbb{R}$ ベクトル空間とみなすと, 1 と虚数単位 i からなる基底が取れる．

(2) $1, \xi$ が V を張ることは $\xi^2 = i = -1 + \sqrt{2}\xi$ および $\xi^3 = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i = -\sqrt{2} + \xi$ より従う．次に $1, \xi$ の一次独立性を示す．$a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ が $a_0 + a_1\xi = 0$ を満たすとすると, 実部と虚部に分けて $a_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} a_1 = 0$, $\frac{1}{\sqrt{2}} a_1 = 0$, 従って $a_0 = a_1 = 0$ が成り立たねばならない．

定義より $1, \xi, \xi^2, \xi^3$ は W を生成する．これらが一次独立であることを示そう．$a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}$ が $a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 = 0$ を満たしていると仮定する．ξ^2, ξ^3 と ξ の関係から

$$\begin{aligned} 0 = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 &= a_0 + a_1\xi + a_2(-1 + \sqrt{2}\xi) + a_3(-\sqrt{2} + \xi) \\ &= \left(a_0 + \frac{a_1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}a_3 + \frac{a_3}{\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{a_1}{\sqrt{2}} + a_2 + \frac{a_3}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

すると実部と虚部はともにゼロでなければならないので, $a_0 + \frac{a_1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}a_3 + \frac{a_3}{\sqrt{2}} = \frac{a_1}{\sqrt{2}} + a_2 + \frac{a_3}{\sqrt{2}} = 0$. これは次のように整理できる．

$$\begin{cases} a_0 + \sqrt{2}\left(\frac{a_1}{2} - \frac{a_3}{2}\right) = 0, \\ a_2 + \sqrt{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

$a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}$ なので $a_0 = \frac{a_1}{2} - \frac{a_3}{2} = 0$, $a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2} = 0$ が必要．これを解けば $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ が結論される．