担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

線形代数の復習

実施日：November 2, 2016

今回は新しい内容は扱いません。また、中間試験前なので提出問題もありません。その代わり、

(a) 復習のための問題

(b) 視野を広げるための問題

を補充しました。
(b) は中間試験の範囲には含まれませんが、(a) はこれまでの内容の復習ですので、試験のためにも確認しておくと良いと思います。まだ理解が覚束ないという人は、(a) や、これまでに配られた問題から取り組んでみてください。(a) では簡単すぎるという人は (b) を解いてみてください。

どの回の内容についても質問して構いません。

復習のための問題

問題 1. 次の $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組は基底であるかどうか判定せよ。(第 3 回の問題 5 なども参考にせよ。)

(1) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}.$

(2) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$

(3) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-7\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}.$

問題 2. 次の線形写像は線形写像か判定せよ。(第 5 回の例題 1, 問題 1 や問題 2 なども参考にせよ。)

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y-z\\-x+z\\x-y\end{pmatrix}$

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4x+y\\x+3y\\y\end{pmatrix}$

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(3) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-z\\y+1\end{pmatrix}$

問題 3. 線形写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4y+z\\x+z\\x+2y\end{pmatrix}$ について、次のそれぞれの場合に、ベクトル $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), f(\boldsymbol{v}_3)$ を $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ の一次結合で表せ。(第 5 回の問題 3 なども参考にせよ。)

(1) $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$

(2) $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$

(3) $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}7\\4\\5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}.$

問題 4. 問題 3 と同じ状況で、(1), (2), (3) の基底に関する f の表現行列を求めよ。(第 5 回の例題 2、問題 5 や問題 9 なども参考にせよ。)

視野を広げるための問題

問題 5. 平面上のベクトル $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ は複素数 $z=x+\sqrt{-1}y$ に対応する。複素数 $\alpha=a+\sqrt{-1}b$ を 1 つ固定し、勝手な z を α 倍することで定まる一次変換 $f_\alpha\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を考える。

(1) 基底 $(1,0),(0,1)$ による f_α の表現行列を求めよ。

(2) 特に $\alpha=\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$ の定める一次変換を考える。これは「原点を中心とした角度 θ 回転」が定める一次変換と同じものであることを、表現行列によって確かめよ。

(3) 「線形写像の合成は表現行列の積に対応している」ことを利用して、三角関数の加法定理

$$(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)=\cos(\theta+\varphi)+\sqrt{-1}\sin(\theta+\varphi)$$

を示せ。

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 6.

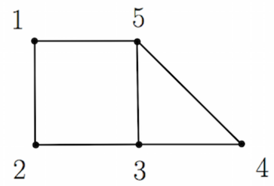
(1) $\mathbb{R}^2$ の一次変換

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

を考える。勝手なベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ に対し $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成り立つことを示せ。ただし $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は $\mathbb{R}^2$ の内積である。

(2) 勝手なベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ に対し $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成り立つような一次変換 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は上の形のものに限ることを示せ。

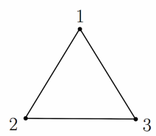
問題 7. 図左側のように、番号の付いた頂点たちを線で繋いだものを**グラフ**という。各番号 i, j に対し i と j を繋ぐ線の数を a_{ij} とすると、図右側のような n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ が得られる。ただし n は頂点の数である。



$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&1 \\ 1&0&1&0&0 \\ 0&1&0&1&1 \\ 0&0&1&0&1 \\ 1&0&1&1&0 \end{pmatrix}$$

(1) A は対称行列である、すなわち $a_{ij} = a_{ji}$ が成り立つことを示せ。

(2) 次のグラフについて A, A^2, A^3, A^4 を計算せよ。



(3) 各番号 i, j に対し、i から j まで丁度 k 本の線を伝って行くルートを考える。そのようなルートの総数は A^k の (i, j)-成分で与えられることを示せ。(まず $k = 2$ で考えてみよ。)

問題 8. $\mathbb{R}^2$ の基底を 2 組取り、それぞれ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2$ とする。

(1) n 次正方行列 P で

$$(\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)P$$

を満たすものが一意的に存在することを示せ。

担当教員：久本 智之　研究室：A343 E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を線形変換とする。それぞれの基底に関する f の表現行列を

$$(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2)) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)A,$$
$$(f(\boldsymbol{v'}_1), f(\boldsymbol{v'}_2)) = (\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2)A'$$

とおくとき、$A' = P^{-1}AP$ が成り立つことを示せ。

問題 9. (発展問題) ここまで、ベクトル空間といったときは実数による定数倍のみを考えてきた。煩くいうとこれは $\mathbb{R}$ ベクトル空間というものである。ベクトル空間の定義において、複素数による定数倍を許したものを $\mathbb{C}$ ベクトル空間、有理数による定数倍のみ許したものを $\mathbb{Q}$ ベクトル空間という。

(1) 複素数の全体は $\mathbb{C}$ ベクトル空間と見做したとき 1 次元、$\mathbb{R}$ ベクトル空間と見做したとき 2 次元であることを示せ。

(2) 虚数単位を i とし、$\xi := \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ とおく。集合

$$\left\{ a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \;\middle|\; a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

は 2 次元の $\mathbb{R}$ ベクトル空間で、基底として $1, \xi$ が取れることを示せ。一方、集合

$$\left\{ a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \;\middle|\; a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q} \right\}$$

は 4 次元の $\mathbb{Q}$ ベクトル空間で、基底として $1, \xi, \xi^2, \xi^3$ が取れることを示せ。