担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

全微分と接平面　解答例

問題 1. $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるので $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow{x\to a} f'(a)$ である。$K(x) = \dfrac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{|x-a|}$ とすると $|K(x)| = \left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| \xrightarrow{x\to a} 0$ であるから $K(x) \xrightarrow{x\to a} 0$ となり、確かに成り立っている。

問題 2.

(1) 全微分可能であることから、ある定数 A, B があって

$$f(x,y) = f(a,b) + A(x-a) + B(y-b) + o(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2})$$

が成り立っている。$y = b$ とすると $f(x,b) = f(a,b) + A(x-a) + o(\sqrt{(x-a)^2})$ である。これは

$$K(x) = \frac{f(x,b)-f(a,b)-A(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2}} = \frac{f(x,b)-f(a,b)-A(x-a)}{|x-a|}$$

としたときに $K(x) \xrightarrow{x\to a} 0$ を意味している。よって $|K(x)| = \left|\dfrac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} - A\right| \xrightarrow{x\to a} 0$ であるから $f(x,y)$ は (a,b) で x について偏微分できて

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x\to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} = A$$

となる。y についても同様である。

(2) $y = b$ とすると、(1) より

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x\to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$$

が存在する。これは

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} = \lim_{x\to a+0} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} = \lim_{x\to a-0} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$$

を満たす。仮定より（中辺）≥ 0、（右辺）≤ 0 であるから、これらは 0 に等しい。y に関する偏微分係数についても同様である。

問題 3. (1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 4y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 9y^2 + 4x$ で、ともに連続関数である。よって

$$f(x,y) = 2a^3 + 3b^3 + 4ab + (6a^2+4b)(x-a) + (9b^2+4a)(y-b) + o(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}).$$

(2) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos(x^2+y^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\cos(x^2+y^2)$ で、ともに連続関数である。よって

$$f(x,y) = \sin(a^2+b^2) + (2a\cos(a^2+b^2))(x-a) + (2b\cos(a^2+b^2))(y-b) + o(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}).$$

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 4. 全微分可能であることより、ある定数 A, B が存在して

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-f(a,b)-A(x-a)-B(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0.$$

この極限の（分母）$\xrightarrow{(x,y)\to(a,b)} 0$ であるから（分子）$\xrightarrow{(x,y)\to(a,b)} 0$ である必要があり、$A(x-a)+B(y-b) \xrightarrow{(x,y)\to(a,b)} 0$ であるから $f(x,y)-f(a,b)$ の極限も存在し、それは 0 である。すなわち $f(x,y)$ は (a,b) において連続である。

問題 5. (1) $f(3,1)=15$ である。$\frac{\partial f}{\partial x}=2x, \frac{\partial f}{\partial y}=3y^2$ であるから $\frac{\partial f}{\partial x}(3,1)=6, f\frac{\partial f}{\partial y}(3,1)=3$ である。よって求める方程式は $z=15+6(x-3)+3(y-1)=6x+3y-6$ である。

(2) $f(0,0)=1$ である。$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=e^{x+y}$ であるから $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$ である。よって求める方程式は $z=1+x+y$ である。

問題 6. $z^2=4-4x^2-2y^2$ であるが、$z=-1$ より $z=f(x,y)=-\sqrt{4-4x^2-2y^2}$ である。

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{4x}{\sqrt{4-4x^2-2y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{\sqrt{4-4x^2-2y^2}}$$

であるから $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{1}{2},1)=2, \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{1}{2},1)=2$ となる。よって求める方程式は $z=-1+2(x-\frac{1}{2})+2(y-1)=2x+2y-4$ となる。

問題 7. 点 (a,b) をとる。任意の (x,y) に対して平均値の定理より、ある θ $(0<\theta<1)$ が存在し、$(x',y') := (\theta a+(1-\theta)x, \theta b+(1-\theta)y)$ について

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(x',y')\ (x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(x',y')\ (y-b)$$

が成り立つ。ここで仮定を使うと $f(x,y)=f(a,b)$ となる。つまり $f(x,y)$ は定数関数。

問題 8.

(1) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=3a^2-3b=0$ と $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=3b^2-3a=0$ を連立して解くことにより $(a,b)=(0,0),(1,1)$ を得る。

(2) 与えられた関数 $f(x,y)$ は C^3 級で $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}=6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}=6y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-3$ だから、定理 4 を適用して

$(a,b)=(0,0)$ のとき

$$f(x,y)=-3xy+o\big(x^2+y^2\big),$$

$(a,b)=(1,1)$ のとき

$$f(x,y)=-1+3(x-1)^2-3(x-1)(y-1)+3(y-1)^2+o\big((x-1)^2+(y-1)^2\big).$$