

全微分と接平面

実施日：November 9, 2016

2変数関数の全微分

今回から、2変数関数の解析について学んでいく。1変数関数の増減を調べる際は微分を用いた。その根拠は、一次近似

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(|x - a|)$$

にあった。関数 $f(x)$ が一次式 $f(a) + f'(a)(x - a)$ で近似できるので、 $f'(a)$ の符号で $f(x)$ の増減が分かるといった具合である。

補足 1. $o(|x - a|)$ は Landau の記号で、一般に関数 $F(x), G(x)$ が

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = 0$$

を満たすとき、「 $x \rightarrow a$ における $F(x)$ の order は $G(x)$ に比べて小さい」という意味で

$$F(x) = o(G(x))$$

と書くのであった。今の場合、 $F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$, $G(x) = |x - a|$ としてこの記号を用いている。

問題 1. 1変数関数 $f(x)$ が $x = a$ において微分可能ならば上の意味での一次近似が確かに成り立っていることを示せ。

定義 1. 2変数関数に対して一次近似が成り立つとは、ある定数 A, B があって

$$f(x, y) = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b) + o(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2})$$

を満たすことと定義する。このとき、 $f(x, y)$ は点 (a, b) で全微分可能であるという。

補足 2. 2変数関数 $F(x, y), G(x, y)$ が

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{F(x, y)}{G(x, y)} = 0$$

を満たすとき、

$$F(x, y) = o(G(x, y))$$

と書く。これも Landau の記号と呼ばれる。今の場合、 $F(x, y) = f(x, y) - f(a, b) - A(x - a) - B(y - b)$, $G(x, y) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ としてこの記号を用いている。 $(x, y) \rightarrow (a, b)$ と書いたときはやはり様々な近づき方を想定していることに注意せよ。

$f(x, y)$ が全微分可能ならば、($x = a$ または $y = b$ とすることで) 偏微分ができて、

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

となることが分かる。

問題 2. (提出問題) このことを確かめよ。

しかし、偏微分ができて全微分可能とは限らない。 C^1 級ならよくて、次の事実が知られている。

定理 1. 偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ が存在し点 (a, b) のまわりで連続ならば、 $f(x, y)$ は全微分可能である。

問題 3. 次の 2 変数関数 $f(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ における一次近似を求めよ。

(1) $f(x, y) = 2x^3 + 3y^3 + 4xy$

(2) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$

問題 4. 2 変数関数 $f(x, y)$ が点 $(x, y) = (a, b)$ において全微分可能ならば、 $f(x, y)$ は (a, b) において連続であることを示せ。

ヒント: 1 変数関数は「微分可能なら連続」であった。この証明を思い出し参考にせよ。

2 変数関数の接平面の方程式

1 変数関数 $f(x)$ のグラフとは、 xy 平面上の集合

$$\left\{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ は定義域に含まれる点} \right\}$$

であった。さらに $x = a$ において一次近似が成り立っているとき、

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

で定まる直線をグラフの接線と呼ぶのであった。

定義 2. 2変数関数 $f(x, y)$ のグラフを、 xyz 空間上の集合

$$\left\{ (x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \text{ は定義域に含まれる点} \right\}$$

と定義する。さらに $(x, y) = (a, b)$ において一次近似が成り立っているとき、

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) (y - b)$$

で定まる平面を点 $(a, b, f(a, b))$ におけるグラフの接平面と呼ぶ。

例題 1. $z = f(x, y) = \frac{1}{1 - 2x - y}$ のグラフの点 $(0, 0, 1)$ における接平面を求めよ。

【解答】 $1 - 2x - y \neq 0$ である限り $f(x, y)$ は全微分可能で、 $f_x(x, y) = 2/(1 - 2x - y)^2$, $f_y(x, y) = 1/(1 - 2x - y)^2$. 特に、 $(x, y) = (0, 0)$ において $f_x(0, 0) = 2$, $f_y(0, 0) = 1$. また、 $(x, y) = (0, 0)$ において $f(0, 0) = 1$ なので、求める接平面の方程式は

$$z = 1 + 2x + y$$

となる。

問題 5. 以下で与えられる2変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフ上の点 $(a, b, f(a, b))$ における接平面の方程式を求めよ。

(1) $f(x, y) = x^2 + y^3 + 5$, $(a, b) = (3, 1)$.

(2) $f(x, y) = e^{x+y}$, $(a, b) = (0, 0)$.

問題 6. (提出問題) 2次方程式 $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1$ で定まる楕円面の、点 $(1/2, 1, -1)$ における接平面の方程式を求めよ。

ヒント: $z = f(x, y)$ の形に解き、求めるものをグラフの接平面として捉えよ。

2変数関数に対する平均値の定理

上に書いた一次近似のアイデアを用いれば、2変数関数に対する平均値の定理は次のように述べることができる。

定理 2. 2変数関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) のまわりで定義されていて、 C^1 級であるとする。このとき、勝手な (x, y) に対しある $0 < \theta < 1$ が存在し、

$$(x', y') := (\theta a + (1 - \theta)x, \theta b + (1 - \theta)y)$$

について

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(x', y') (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(x', y') (y - b)$$

が成り立つ。

問題 7. C^1 級関数 $f(x, y)$ の 1 階偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ が恒等的にゼロであるとする。このとき $f(x, y)$ は定数関数であることを示せ。

問題 8. (提出問題) C^1 級関数 $f(x, y)$ が、点 (a, b) のまわりのどんな点 (x, y) に対しても

$$f(x, y) \geq f(a, b)$$

を満たすとする。このとき $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ となることを示せ。

ヒント: 平均値の定理を使う。直線 $y = 0$ や $x = 0$ に沿った関数の振る舞いを考えよ。

2変数関数に対する Taylor の定理

2変数関数が C^2 級ならば、一次近似の剰余項についてさらに詳細な情報が得られる。

定理 3. 2変数関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) のまわりで定義されていて、 C^2 級であるとする。このとき、勝手な (x, y) に対しある $0 < \theta < 1$ が存在し、

$$(x', y') := (\theta a + (1 - \theta)x, \theta b + (1 - \theta)y)$$

について

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) (y - b) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x', y') (x - a)^2 \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x', y') (x - a)(y - b) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x', y') (y - b)^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。

これをさらに一般化したものが次の定理である。

定理 4. 2変数関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) のまわりで定義されていて、 C^{n+1} 級であるとする。このとき、勝手な (x, y) に対しある $0 < \theta < 1$ が存在し

$$(x', y') := (\theta a + (1 - \theta)x, \theta b + (1 - \theta)y)$$

について

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n {}^n C_k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(a, b)(x - a)^{n-k}(y - b)^k + R_{n+1}(x, y) \\ R_{n+1}(x, y) &= \sum_{i+j=n+1} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^i \partial y^j}(x', y')(x - a)^i(y - b)^j \end{aligned}$$

が成り立つ。

問題 9. 関数 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ を考える。

- (1) $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ となるような実数の組 (a, b) を全て求めよ。
- (2) (1) で求めた各 (a, b) に対し、 $f(x, y)$ の二次近似を求めよ。二次近似の意味は一次近似から類推して各自考えよ。