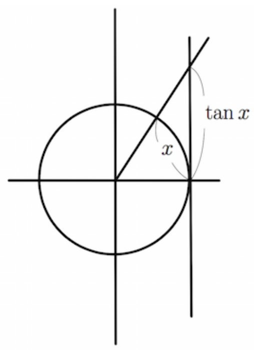
担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

線形写像　解答例

全単射に関する問いの解説

(1) 勝手な元 $a \in [0,\infty)$ に対し, $x = \pm\sqrt{a}$ とすると $f(x) = a$ となるので, f は全射. 一方, $a \neq 0$ に対し, $x = \sqrt{a}, y = -\sqrt{a}$ とすると, $x \neq y$ だが $f(x) = f(y)$ となるので単射ではない.

(2) f が全単射であることを示す. 図の様に, 単位円周上の点 $(1,0)$ を通り y 軸に平行な直線 ℓ を考える. 原点を通り角度 x の直線 ℓ' を考えると, ℓ と ℓ' の交点は $(1,\tan x)$ で与えられる.
全射性: $a \in \mathbb{R}$ を任意の実数とすると, 図より $a = \tan x$ となる x が存在することが分かる. よって f は全射である.
単射性: 図より, $\tan x = \tan x'$ ならば $x = x'$ となることが分かる. よって f は単射である. (直接計算でも確かめられる.)



問題 1.

(1) f は線形写像でない. 実際, $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ だから $x = \frac{\pi}{4}, y = \frac{\pi}{4}$ に対し $f(x+y) = 1$ だが $f(x) + f(y) = \sqrt{2}$ である.

(2) f は線形写像である. 実際, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ と任意の実数 $c \in \mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned} f(c\boldsymbol{x}) &= (cx_3, 5cx_2 - cx_1) \\ &= c(x_3, 5x_2 - x_1) \\ &= cf(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

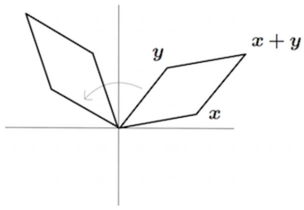
また $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ に対し,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= (x_3 + y_3, 5(x_2 + y_2) - (x_1 + y_1)) \\ &= (x_3, 5x_2 - x_1) + (y_3, 5y_2 - y_1) \\ &= f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}). \end{aligned}$$

(3) f は線形写像でない. 実際 $f(\mathbf{0}) = (1,-1) \neq \mathbf{0}$ となっている.

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(4) 平面上のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 及び $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ は図の右側の平行四辺形の各頂点で与えられている．このとき，原点を中心として反時計回りに角度 θ 回転したベクトル $f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})$ 及び $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ は，左側の平行四辺形の各頂点に他ならない．従って $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$ が成立している．



同様に，任意の実数 $c \in \mathbb{R}$ に対し $f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$ となることが確かめられる．

さて $\mathbb{R}^2$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を原点中心に θ 回転させれば，$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ となることが分かる．従って，基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ に関する f の表現行列は

$$\big(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2)\big) = \big(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\big)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

で与えられる．よって

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

が成立する．

問題 2.

(1) 勝手な定数 $c \in \mathbb{R}$ に対し，f, g の線形性より

$$g \circ f(c\boldsymbol{x}) = g(f(c\boldsymbol{x})) = g(cf(\boldsymbol{x})) = cg(f(\boldsymbol{x})) = cg \circ f(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．また，勝手な $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対し

$$\begin{aligned} g \circ f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= g(f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) \\ &= g(f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})) \\ &= g(f(\boldsymbol{x}))+g(f(\boldsymbol{y})) \\ &= g \circ f(\boldsymbol{x}) + g \circ f(\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって $g \circ f$ は線形写像．

(2) $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が成立しているとして, f が単射となることを示す. $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$ とすると, $f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) = 0$ となるので $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$. 従って $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ となる.

逆に f が単射であったとする. f が線形写像なので $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ となることに注意すれば, $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{0}) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

問題 3. $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると, これらは $\mathbb{R}^2$ の基底であり, 勝手な $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の 1 次結合として $(x, y) = (x + y)\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2$ と表せる. すると, f の線形性から

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f((x + y)\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2) = (x + y)f(\boldsymbol{v}_1) + yf(\boldsymbol{v}_2) \\ &= (x + y)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

問題 4.

(1) f の線形性より, 勝手な $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker} f$ および $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x}) = c\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

なので $c\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker} f$ となる. 同様に, 勝手な $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker} f$ に対し

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

なので $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker} f$.

以上により, $\mathrm{Ker} f$ は定数倍と足し算で閉じた V の部分集合であるので, 部分ベクトル空間である.

(2) $(x, y, z) \in \mathrm{Ker} f \;\Leftrightarrow\; x + z = x + y = y - z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = y = -x$ である. 従って, $\mathrm{Ker} f = \{(x, -x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ と書ける. つまり $\mathrm{Ker} f$ は 1 次元の部分ベクトル空間で, 基底は例えば $(1, -1, -1)$ が取れる.

問題 5. 基底 $1, x, \ldots, x^d$ に関する f の表現行列を A とする. $1, x, \ldots, x^d$ は f によって

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 1, \\ x &\mapsto x - 1, \\ x^2 &\mapsto (x - 1)^2, \\ &\vdots \\ x^d &\mapsto (x - 1)^d \end{aligned}$$

と移されるので

$$\begin{aligned} &\left(1, x - 1, (x - 1)^2, \ldots, (x - 1)^d\right) \\ &= (1, x, x^2, \ldots, x^d)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \ldots & (-1)^d \\ 0 & 1 & -2 & \ldots & (-1)^{d-1}{}_dC_1 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

つまり

$$A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le d+1}, \qquad a_{ij} = \begin{cases} 0 & (i > j) \\ (-1)^{i+j}{}_{j-1}C_{i-1} & (i \le j). \end{cases}$$

問題 6. 条件 (1), (2) を満たす線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の基底 $(1,0), (0,1)$ に関する表現行列を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする．定理 1 を使えば, 条件 (1) は

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{$*$}$$

と書き直せる．条件 (2) は, 連立方程式

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = x_1 \\ cx_1 + dx_2 = x_2 \end{cases}$$

の解 (x_1, x_2) が $(0,0)$ のみであることを意味する．従って, 条件 (2) は行列式に関する条件

$$\begin{vmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{$**$}$$

と同値である．

以下場合分けして $(*)$ と $(**)$ を満たす a, b, c, d を求めよう．

i) $a + d = 0$ の場合．$(*)$ より $a^2 + bc = 1$ である．また, 場合分けの仮定より $d = -a$ なので, $(**)$ の行列式は

$$(a-1)(d-1) - bc = (a-1)(-a-1) + (a^2-1) = 0$$

となる．これはおかしいので, $a + d = 0$ では有り得ないことが分かった．

ii) $a + d \neq 0$ の場合．$(*)$ は

$$b = c = 0, \qquad a^2 = d^2 = 1$$

と同値である．これを $(**)$ に代入すると $(a-1)(d-1) \neq 0$ つまり $a \neq 1$ かつ $d \neq 1$ なので, $a = d = -1$ でなければならない．

以上より, 表現行列は $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ に限る．つまり条件 (1), (2) を満たす f は $f(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$ に限る．

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

別解: 標準基底に関する f の表現行列を A とする．単位行列を E とおけば，条件 (1) より $A^2 = E$ が成立する．零行列を O とおけば，$A^2 - E = (A+E)(A-E) = O$ が従う．一方，条件 (2) より $(A-E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ なので，$A - E$ は正則行列．結局 $A + E = O$ でなければならない．

問題 7. V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を何でもよいから固定し，この基底に関する $f : V \to V$ の表現行列を A_f とする．A が正則であることと A_f の行列式がゼロでないことは同値だった．(前期プリント第 8 回「行列式の計算」定理 12 参照.)

まず，f が全単射ならば行列式はゼロでないことを示す．f の逆写像 $f^{-1} : V \to V$ を取り，基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に関する f^{-1} の表現行列を $A_{f^{-1}}$ とする．定理 1 より

$$A_f A_{f^{-1}} = A_{f \circ f^{-1}} = A_{\mathbf{1}_V}$$

で，さらに恒等写像の表現行列 $A_{\mathbf{1}_V}$ は単位行列 E と等しい．よって $A_f A_{f^{-1}} = E$ となる．同様に $A_{f^{-1}} A_f = E$ となることもわかる．よって A は正則である．

逆に A_f の行列式がゼロではないと仮定する．A_f は正則行列なので，A_f の逆行列 B が存在し，

$$A_f B = B A_f = E$$

を満たす．そこで線形写像 $g : V \to V$ を

$$(g(\boldsymbol{v}_1), \ldots, g(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) B$$

によって定めれば，これは $B = A_g$ を意味する．定理 1 より

$$A_{f \circ g} = A_f A_g = A_f B = E = A_{\mathbf{1}_V}$$

つまり，$A_{f \circ g} = A_{\mathbf{1}_V}$ が成り立つ．一般に，2 つの線形写像の (同じ基底に関する) 表現行列が等しければ，それらは写像としても等しい．よって $f \circ g = \mathbf{1}_V$ を得る．同様に $g \circ f = \mathbf{1}_V$ が成り立つ．これは g が f の逆写像ということに他ならない．

問題 8. ベクトル空間 U の元 $u \in U$ および勝手な実数 $c \in \mathbb{R}$ に対し，

$$f(cu) = (cu(0), cu(2\pi)) = cf(u).$$

また，$u, v \in U$ に対し

$$\begin{aligned} f(u+v) &= ((u+v)(0), (u+v)(2\pi)) \\ &= (u(0), u(2\pi)) + (v(0), v(2\pi)) \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって f は線形写像．

U の基底 $\cos(nx), \sin(nx)$ の行き先を調べると

$$f(\cos(nx)) = (\cos(0), \cos(2\pi)) = (1, 1),$$
$$f(\sin(nx)) = (\sin(0), \sin(2\pi)) = (0, 0)$$

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

なので, $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば

$$(f(\cos(nx)), f(\sin(nx))) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ. つまり, 求める表現行列は $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である.

問題 9.

(1) 任意の $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$ に対して $d = -a$ なので, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = bX + cY + aH$ と書ける. つまり, V の任意の元は X, Y, H の1次結合で書ける. また, $bX+cY+aH = \mathbf{0}$ ならば $b = c = a = 0$ だから X, Y, H は1次独立である.

(2) 任意の $A \in V$ に対し $f(A)$ がちゃんと V の元になっていることを確認しよう. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ とおけば $f(A) = HA - AH = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & -b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ -2c & 0 \end{pmatrix}$ となる. $(1,1)$-成分と $(2,2)$-成分の和が 0 なので, 確かに $f(A) \in V$ である. f が線形写像であることは明らかだろう.

次に, 基底 X, Y, H に関する表現行列を計算する. $f(X) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2X$, $f(Y) = HY - YH = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -2Y$, $f(H) = HH - HH = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ となる. 従って,

$$(f(X), f(Y), f(H)) = (X, Y, H) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

つまり表現行列は $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) $f^2(H) = f(f(H)) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. 数学的帰納法により, 任意の $n \geq 1$ に対して $f^n(H) = \mathbf{0}$ であることがわかる. また, $f^2(X) = f(f(X)) = f(2X) = 2f(X) = 4X$. 同様に $f^3(X) = f(f^2(X)) = f(4X) = 4f(X) = 8X$. 数学的帰納法により, 任意の n に対して $f^n(X) = 2^n X$ であることが分かる. $f^n(Y) = (-2)^n Y$ であることも同様に示される.

以上の計算により,

$$(f^n(X), f^n(Y), f^n(H)) = (X, Y, H) \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

※定理 1 を使えば, (2) で求めた表現行列を n 乗するだけでよい。ここでは敢えて面倒な計算を試した。