担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

2 変数関数の連続性と微分可能性 解説

問題 1. (連続性) 3 種類の曲線 i)(直線) $(x,y)=(t,at)$ $(t>0)$, ii)(放物線) $(x,y)=(t,t^2)$ $(t>0)$, iii)(双曲螺旋) $(x,y)=(\frac{\cos\theta}{\theta},\frac{\sin\theta}{\theta})$ $(\theta>0)$, に沿って (x,y) を $(0,0)$ に近づけたときに $f(x,y)$ がそれぞれどうなるか調べる．このとき, それぞれの曲線に沿って (x,y) を $(0,0)$ に近づけることは, それぞれ i) $t\to+0$, ii) $t\to+0$, iii) $\theta\to\infty$ と同値であることに注意せよ．

(1)　i) $f(t,at)=\dfrac{at^2}{t^2+a^2t^2}=\dfrac{a}{1+a^2}$ なので $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)=(t,at)}}f(x,y)=\frac{a}{1+a^2}$. よって, $a=0$ の場合に限り $f(0,0)$ に近づいている．

ii) $f(t,t^2)=\dfrac{t^3}{t^2+t^4}=\dfrac{t}{1+t^2}$ なので $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)=(t,t^2)}}f(x,y)=0=f(0,0)$.

iii) $f\left(\dfrac{\cos\theta}{\theta},\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)=\dfrac{\cos\theta\sin\theta/\theta^2}{\cos^2\theta/\theta^2+\sin^2\theta/\theta^2}=\cos\theta\sin\theta$ なので $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)=(\frac{\cos\theta}{\theta},\frac{\sin\theta}{\theta})}}f(x,y)$ は存在しない．

i) では $f(0,0)$ に近づくのは $a=0$ の場合に限る．iii) では極限値が存在しない．すなわち, $(x,y)\to(0,0)$ における $f(x,y)$ の極限は存在しない．したがって, 関数 f は原点で連続でないことが分かる．

(2)　i) $f(t,at)=\dfrac{at^3}{t^4+a^2t^2}=\dfrac{at}{t^2+a^2}$ なので, a の値に関わらず $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)=(t,at)}}f(x,y)=0=f(0,0)$.

ii) $f(t,t^2)=\dfrac{t^4}{t^4+t^4}=\dfrac{1}{2}$ なので $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)=(t,t^2)}}f(x,y)=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$.

iii) $f\left(\dfrac{\cos\theta}{\theta},\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)=\dfrac{\cos^2\theta\sin\theta/\theta^3}{\cos^4\theta/\theta^4+\sin^2\theta/\theta^2}=\dfrac{\theta\cos^2\theta\sin\theta}{\cos^4\theta+\theta^2\sin^2\theta}$ である．これを $g(\theta)$ とする．$\theta\to\infty$ のとき $g(\theta)$ は収束しない．証明は以下を参照せよ．したがって, $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)=(\frac{\cos\theta}{\theta},\frac{\sin\theta}{\theta})}}f(x,y)$ は存在しない．

ここからは $\theta\to\infty$ のとき $g(\theta)$ が収束しないことを示す．まず, $\theta_n=2n\pi$ とすれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\theta_n=\infty$ である．$\sin\theta_n=0$, $\cos\theta_n=1$ より $g(\theta_n)=0$ なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}g(\theta_n)=0$ である．これより, $\theta_n\to\infty$ なる数列 $\{\theta_n\}$ で $g(\theta_n)$ が 0 に収束しないようなものを 1 つ探せば良い．例えば次のような数列が挙げられる．

(例 1) $\alpha_n=\mathrm{Arcsin}(1/n)$, $\theta_n=\alpha_n+2n\pi$ とする．このとき, $\sin\theta_n=\dfrac{1}{n}$, $\cos\theta_n=\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\theta_n=\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\theta_n\sin\theta_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_n}{n}+2\pi\right)=2\pi$ である．したがって, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}g(\theta_n)=\frac{2\pi}{1+4\pi^2}\neq0$ である．

担当教員：久本 智之　研究室：A343 E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(例 2) ii) の曲線 $y=x^2$ との交点, すなわち, $\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}=\left(\frac{\cos\theta_n}{\theta_n}\right)^2$ なる θ_n で $\theta_n\to\infty$ となるものをとれば, ii) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}g(\theta_n)=\frac{1}{2}\neq 0$ である.

以上より, $(x,y)\to(0,0)$ における $f(x,y)$ の極限は存在しない. したがって, 関数 f は原点で連続でない.

問題 2. (偏微分係数)

(1) まず $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ を求める. $(x,y)\neq(0,0)$ のとき, $f(x,y)$ の y を定数と見なせば x の関数として微分可能なので, $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. x と y の関係は対称的だから $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(2) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$ なので, 定義より $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ である. 同様に $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ を得る.

【注意】(1) で求めた $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ と $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ は $(x,y)\neq(0,0)$ の場合だけ正しい式なので, そこで $(x,y)\to(0,0)$ としても (2) で求めた $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ と $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ に一致するとは限らない. これらが「一致する」ということは, 「関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ と $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ が $(x,y)=(0,0)$ で連続である」ということに他ならない. ところが今の場合, 次の (3) で示すように $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ も $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ も $(x,y)=(0,0)$ において連続ではないのである.

(3) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ についてのみ書く. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ についても同様なので各自フォローしておくこと. (1) で求めた $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ で $x=0$, $y>0$ とすると $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=1$ となるので, $(x,y)\to(0,0)$ としても $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ は $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ $(=0)$ に収束しない. ゆえに, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において連続ではない.

問題 3. (高階の偏微分係数)

(1) まず $\frac{\partial f}{\partial x}(0,b)$ を計算する. $b\neq0$ と $b=0$ の場合で場合分けをする. どちらの場合も $f(0,b)=0$ であることに注意せよ. $b\neq0$ の場合は

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h,b)-f(0,b)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{hb\,\dfrac{h^2-b^2}{h^2+b^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}b\,\frac{h^2-b^2}{h^2+b^2}=b\,\frac{-b^2}{b^2}=-b$$

なので, 定義より $\frac{\partial f}{\partial x}(0,b)=-b$ である. $b=0$ の場合は

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to0}0=0$$

なので, 定義より $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ である. したがって, b がどのような定数でも $\frac{\partial f}{\partial x}(0,b)=-b$ である. 次に $\frac{\partial f}{\partial y}(a,0)$ を計算すると, 同様の計算により, a がどのような定数でも $\frac{\partial f}{\partial y}(a,0)=a$ である. 詳細は上の計算を参考にして各自で確認すること. x と y が反対称の関係にあることを用いても求めることができる.

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(2) (1) より
$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$
なので, 定義より $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1$ である. 同様に,
$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h-0}{h}=\lim_{h\to 0}-1=-1$$
なので, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=-1$ である. したがって $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ である.

問題 4. (提出問題) 偏微分する変数以外を定数だと思って微分すれば良い.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos(x\cos y)\cos y,\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-x\cos(x\cos y)\sin y,$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-\sin(x\cos y)\cos^2 y,\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=x\sin(x\cos y)\sin y\cos y-\cos(x\cos y)\sin y,$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=x\sin(x\cos y)\sin y\cos y-\cos(x\cos y)\sin y,$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-x^2\sin(x\cos y)\sin^2 y-x\cos(x\cos y)\cos y.$

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=yx^{y-1},\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^y\log x,\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=y(y-1)x^{y-2},$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=x^{y-1}(1+y\log x),\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}(x,y)=x^{y-1}(1+y\log x),$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=x^y(\log x)^2.$

問題 5. 順に偏微分していくと,

$\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)=\dfrac{-x}{2t}u(x,t),\qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\left(\dfrac{-1}{2t}+\dfrac{x^2}{4t^2}\right)u(x,t),$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=\left(\dfrac{-1}{2t}+\dfrac{x^2}{4t^2}\right)u(x,t),\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}(x,t)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}(x,t)=\left(\dfrac{3x}{4t^2}-\dfrac{x^3}{8t^3}\right)u(x,t),$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=\left(\dfrac{3}{4t^2}-\dfrac{3x^2}{4t^3}+\dfrac{x^4}{16t^4}\right)u(x,t)$ である.

これより, $\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ が成り立つ (この微分方程式は熱方程式と呼ばれている. u は熱方程式の解である).

問題 6.

(定理 2 を用いる) 直線 $(x,y)=(ta,tb)$ は, もう一つ別の変数については定数だと考える (すなわち, $x=x(s,t)=ta$ などとみなす) ことで, 定理 2 が使える. したがって, 定理 2 より次が従う:
$$\frac{dF}{dt}(0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\frac{\partial y}{\partial t}=a\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+b\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(直接証明する) $h \neq 0$ とする．平均値の定理より

$$f(ha,hb)-f(0,hb)=ha\frac{\partial f}{\partial x}(c_1,hb),\quad f(0,hb)-f(0,0)=hb\frac{\partial f}{\partial y}(0,c_2)$$

をみたし，それぞれ 0 と ha, 0 と hb の間にある c_1, c_2 が存在する． $h \to 0$ のとき $c_1 \to 0$, $c_2 \to 0$ である．よって,

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt}(0)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(ha,hb)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(a\frac{f(ha,hb)-f(0,hb)}{ha}+b\frac{f(0,hb)-f(0,0)}{hb}\right)\\&=\lim_{h\to 0}\left(a\frac{\partial f}{\partial x}(c_1,hb)+b\frac{\partial f}{\partial y}(0,c_2)\right)=a\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+b\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで, 最後の等号に偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ が連続であることを用いた．

問題 7. (提出問題)

(1) 定理 2 より

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r},\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$$

である．Jacobi 行列の行列式 (Jacobian という) は r だから, $r>0$ より Jacobi 行列は正則行列である．したがって, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)&=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r},\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}^{-1}=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r},\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r}\end{pmatrix}\\&=\left(\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},\ \sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right).\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}$ や $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}$ は r や θ の関数であること, 及び φ が C^2 級であることに注意して,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}&=\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)\\&=\cos^2\theta\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},\\\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}&=\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)\\&=\sin^2\theta\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\end{aligned}$$

を得る．ここで, φ が C^2 級より $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta\partial r}$ であることを用いた．したがって, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}$ が成り立つ．