担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

2変数関数の連続性と微分可能性

実施日：October 18, 2017

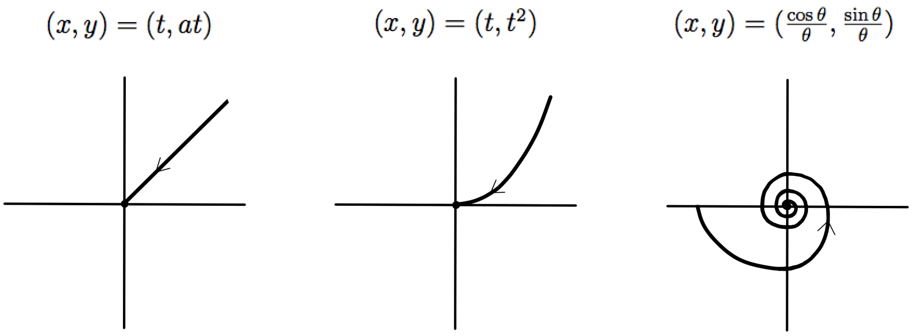
連続性

定義 1. 平面 $\mathbb{R}^2$ で定義され実数に値を持つ関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ が、点 (a,b) で**連続**であるとは

$$(x,y)\to(a,b) \quad \text{ならば} \quad f(x,y)\to f(a,b)$$

が成り立つことである。これは (x,y) がどのように (a,b) に近づいても $f(x,y)$ が $f(a,b)$ に収束するという意味である。

色々な近づき方の例



例 1. 次の関数 $f(x,y)$ が原点において連続であることを確かめよ。

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

【解答】 極座標表示 $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ を用いると、「$(x,y)\to(0,0)$」と「$r\to0$」は同値である。$(x,y)\neq(0,0)$ (すなわち $r\neq0$) として $f(x,y)$ を r と θ で表すと

$$f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=r\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}r\sin2\theta.$$

右辺の $r\to0$ での極限値は 0 なので、$f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において連続である。

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 1. (連続性) 次の関数 $f(x,y)$ の原点における連続性を調べる。上に示した「色々な近づき方」のそれぞれについて、$f(x,y)$ が $f(0,0)$ に近づいているか調べよ。その上で、これらの関数が原点において連続であるか答えよ。

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

偏微分係数・偏導関数

定義 2. $f(x,y)$ を平面 $\mathbb{R}^2$ において定義された実数値関数とする。点 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ に対し

$$\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

が $h \to 0$ のときある実数に収束するならば、$f(x,y)$ **は、点 (a,b) で x について偏微分可能である**という。その極限値を

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

と書き、**偏微分係数**と呼ぶ。偏微分係数を (a,b) についての関数と見做したものを**偏導関数**と呼び、$\frac{\partial f}{\partial x}$ で表す。
同様に、y に関しする偏微分を

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$

によって定義する。

問題 2. (偏微分係数) 例題 1 で扱った関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

について、以下の問いに答えよ。

(1) $(x,y) \neq (0,0)$ のとき 偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を計算せよ。

(2) 原点における偏微分係数 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ を求めよ。

(3) 2 つの偏導関数の原点における連続性を調べよ。

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

ヒント：偏導関数を求めるには y を定数とし x だけの関数だと思って微分する。(2) は定義に戻って考えてみよ。

2 階の偏導関数

定義 3. 偏導関数をさらに偏微分すれば、2 階の偏微分が得られる。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ などを改めて (a,b) の関数だと見做したものを、2 階の偏導関数と呼ぶ。

問題 3. 以下の関数について, 次の問いに答えよ.

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(1) a, b を定数とするとき, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,b)$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,0)$ を求めよ。

(2) (1) を用いて, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ を計算し, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ を示せ。

補足 1.

- 例題 1 での関数 $f(x,y)$ は各点において連続、さらに偏微分可能であるが、1 階の偏導関数が原点で不連続な例である。
- 問題 3 の関数 $f(x,y)$ は各点で 2 階まで偏微分可能であるが、2 階の偏導関数が原点で不連続となっている。

実は次が成り立つ。

定理 1. (偏微分の交換) 2 階の偏導関数が点 (a,b) でともに連続ならば

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

が成り立つ。

問題 4. (提出問題) 次の関数に対して、2 階までの偏導関数を全て計算せよ。

(1) $f(x,y) = \sin(x\cos y)$

(2) $f(x,y) = x^y$

(3) $f(x,y,z) = (x+y)^z$

問題 5. $x \in \mathbb{R}, t > 0$ に対して定義される関数

$$u(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$$

の 2 階までの偏微分係数を全て計算し、u がどのような微分方程式を満たすか答えよ。

合成関数の微分は 1 変数の場合と大きく異なる。

定理 2. (合成関数の偏微分) $f(u,v)$ が (u,v) についての関数で、さらに、$u = u(x,y), v = v(x,y)$ が (x,y) についての関数であるとする。f 及び u,v がそれぞれの変数について偏微分可能ならば、f は x,y について偏微分可能で

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v}$$

が成り立つ。

行列を用いれば

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

と表現することができる。右側に現れた行列は Jacobi 行列と呼ばれる。

問題 6. (直線に沿った微分) 平面上の関数 $f(x,y)$ で x,y について偏微分可能であるようなものを取る。方向ベクトル $(a,b) \neq (0,0)$ の定める直線 $(x,y) = (ta,tb)$ を考えて、$F(t) := f(ta,tb)$ を t についての 1 変数関数と見做したとき

$$\frac{dF}{dt}(0) = a\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + b\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

が成り立つことを示せ。まず定理 2 を適用して証明し、次に定理 2 を適用せずに直接証明してみせよ。

問題 7. (提出問題) 平面上の極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を取る。x,y について偏微分可能な関数 $f(x,y)$ は、r,θ について偏微分可能な関数となる。次が成り立つことを示せ。

担当教員： 久本 智之　研究室： A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

(1) 1 階偏微分の関係式:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}. \end{cases}$$

(2) Laplace 作用素の極座標表示:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$